Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°1 : TRIGONOMÉTRIE1

Exercice1 : (*) 1) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 30°.

2) Donner la mesure en degrés de l'angle de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad.

3) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 135°.
4) Donner la mesure en degrés de l'angle de mesure 1 rad
5) Convertir en radians les mesures suivantes : 0° ; 30° ; 45° ; 60° ; 90° ; 180°; 360°

Solution :1) $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$ signifie que : $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{30}{180}$

$\alpha=30\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{6}$ rad.

2) $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$ implique $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$ c'est-à-dire : $\alpha\times180=\beta\times\pi$

$\beta=\frac{\alpha\times180}{\pi}=\frac{3\pi}{8}\times\frac{180}{\pi}=67,5°$

3) on a : $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$ équivalent à : $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{135}{180}$

Équivalent à : $\alpha=135\times\frac{\pi}{180}=\frac{3\pi}{4}$ rad.

4) $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$ équivalent à : $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$ c'est-à-dire : $\alpha\times180=\beta\times\pi$

$\beta=\frac{1\times180}{\pi}=\frac{180}{\pi}=57,29579143...\deg\simeq57,2^{\circ}$

5) De la même manière (en appliquant : $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$)

Nous obtenons les mesures remarquables que résume le tableau suivant :

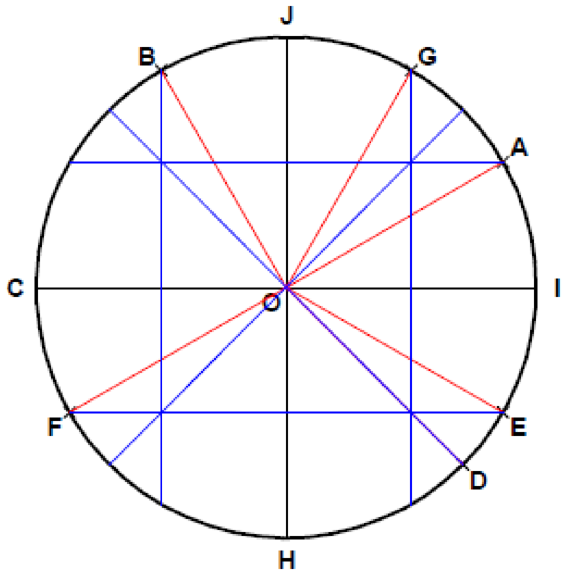
En degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
En radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Exercice2 : (*) Calculer la longueur L de l'arc AB d'un cercle (C) de rayon $R=3cm$ et tel que :

$\alpha=\left(\overline{AOB}\right)=\frac{\pi}{3}rad$

Solution : on a : $L=R\times\alpha=3\times\frac{\pi}{3}cm=\pi cm$

Exercice3 : (*) Sur le cercle trigonométrique ci-contre, déterminer un abscisse curviligne associés aux points : A; B ; C ;D ; E ; F;G ; H;I ; J



Solution : $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $B\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; $C(\pi)$; $D\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $E\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $F\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; $G\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $H\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; $I(0)$; $J\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice4 : (*) 1) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des abscisses suivantes :a) $x_1 = -6\pi$ b) $x_2 = \frac{31\pi}{3}$ c) $x_3 = \frac{-23\pi}{6}$ d) $x_4 = \frac{127\pi}{4}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points : $A(x_1)$; $B(x_2)$; $C(x_3)$;$D(x_4)$

Solution :1)a) $x_1 = -6\pi$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a $x_1 = -6\pi$

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x_1 = 2k\pi$ c a d $\alpha = -6\pi + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi;\pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < -6\pi + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\pi + 6\pi < 2k\pi \leq \pi + 6\pi$

Équivalent à : $5\pi < 2k\pi \leq 7\pi$

Équivalent à : $5 < 2k \leq 7$

Équivalent à : $\frac{5}{2} < k \leq \frac{7}{2}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Alors $k = 3$ et donc $\alpha = -6\pi + 2\times 3\pi = -6\pi + 6\pi = 0$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a $x_1 = -6\pi$ est $\alpha = 0$

b) $x_2 = \frac{31\pi}{3}$

Methode1 : Soit α l'abscisse curviligne principale associée a x_2

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x_2 = 2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha = \frac{31\pi}{3} + 2k\pi$ et $\alpha \in]-\pi;\pi]$

C'est-à-dire : $-\pi < \frac{31\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$ équivalent à : $-\pi - \frac{31\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi - \frac{31\pi}{3}$

Équivalent à : $-\frac{34\pi}{3} < 2k\pi \leq -\frac{28\pi}{3}$

Équivalent à : $-\frac{34}{3} < 2k \leq -\frac{28}{3}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\frac{17}{3} < k \leq -\frac{14}{3}$ et $k \in \mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $-5,6 < k \leq -4,6$ et $k \in \mathbb{Z}$

Alors $k = -5$ et donc : $\alpha = \frac{31\pi}{3} + 2k\pi = \frac{31\pi}{3} + 2(-5)\pi = \frac{31\pi}{3} - 10\pi = \frac{31\pi - 30\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x_2 = \frac{31\pi}{3}$ est : $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Methode2 : $x_2 = \frac{31\pi}{3} \notin \left]-\pi\,;\pi\right]$

On divise 31 par 3 on trouve $\simeq 10,3$ on prend le nombre entier proche ex : 10 et $10 \times 3 = 30$

On a $\frac{31\pi}{3} = \frac{30\pi + \pi}{3} = \frac{30\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 10\pi = \frac{\pi}{3} + 5 \times 2\pi$ et $\frac{\pi}{3} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée a $x_2 = \frac{31\pi}{3}$ est : $\alpha = \frac{\pi}{3}$

c) $x_3 = \frac{-23\pi}{6} \notin \left]-\pi\,;\pi\right]$

On divise 23 par 6 on trouve $\simeq 3,8$ on prend le nombre entier proche ex : 4 et $6 \times 4 = 24$

On a $\frac{-23\pi}{6} = \frac{-24\pi + \pi}{6} = \frac{-24\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - 4\pi = \frac{\pi}{6} + (-2) \times 2\pi$ et $\frac{\pi}{6} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée a $x_3 = \frac{-23\pi}{6}$ est : $\alpha = \frac{\pi}{6}$

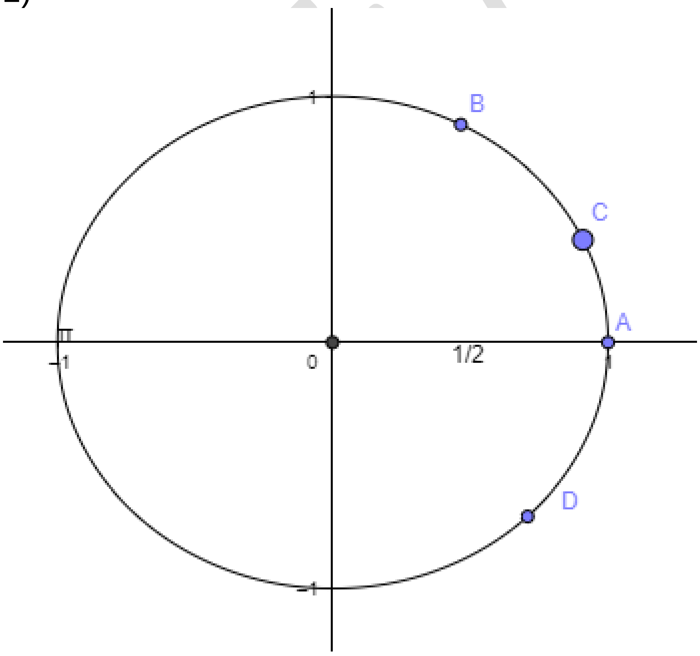
d) $x_4 = \frac{127\pi}{4} \notin \left]-\pi\,;\pi\right]$

On divise 127 par 4 on trouve $\simeq 31,7$ on prend le nombre entier proche ex : 32 et $32 \times 4 = 128$

On a $\frac{127\pi}{4} = \frac{128\pi - \pi}{4} = \frac{128\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 32\pi = -\frac{\pi}{4} + 16 \times 2\pi$ et $-\frac{\pi}{4} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée a $x_4 = \frac{127\pi}{4}$ est : $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

2)



Exercice5 : (**) Soit sur un cercle trigonométrique un point A d'abscisse curviligne principale $\alpha=\frac{\pi}{4}$ et ce point tourne sur ce cercle.

Quel est le nombre de tours effectués par ce point si $x=\frac{65\pi}{4}$ est son abscisse curviligne.

Solution : $\frac{65\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ avec : k le nombre de tours effectués par le point.

$\frac{65\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ Équivalent à : $2k\pi=\frac{65\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{64\pi}{4}$

Équivalent à : $2k=\frac{64}{4}$ Équivalent à : $k=\frac{64}{8}=8$

Le nombre de tours effectués par le point est $k=8$

Exercice6 : (**) Dans chacun des cas suivant, donner trois autres réels associés au même point sur le cercle trigonométrique :1) $A(-\pi)$ 2) $B\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ 3) $C(10\pi)$ 3) $D\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Solution :1) π : 3π ; 5π et plus généralement $-\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

2) $-\frac{\pi}{2}$: $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{2}$ et plus généralement $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

3) 0 : 2π ; 4π et plus généralement $10\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

4) $\frac{7\pi}{4}$: $\frac{15\pi}{4}$; $\frac{23\pi}{4}$ et plus généralement $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Exercice7 : (**) Dans chacun des cas suivants
Déterminer si x et y sont des abscisses curvilignes d'un même point.

1) $x=\frac{\pi}{2}$ et $y=-\frac{3\pi}{2}$ 2) $x=-\frac{5\pi}{4}$ et $y=\frac{3\pi}{4}$

3) $x=\frac{2\pi}{3}$ et $y=\frac{8\pi}{3}$ 4) $x=-\frac{5\pi}{12}$ et $y=\frac{43\pi}{12}$

Solution : x et y sont des abscisses curvilignes d'un même point s'il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $x-y=2k\pi$

1) $x=\frac{\pi}{2}$ et $y=-\frac{3\pi}{2}$

$$x-y=\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}=2\pi=2\times1\times\pi$$

Donc : x et y sont des abscisses curvilignes d'un même point.

2) $x=-\frac{5\pi}{4}$ et $y=\frac{3\pi}{4}$

$$x-y=-\frac{5\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}=-\frac{8\pi}{4}=-2\pi=2\times(-1)\times\pi$$

Donc : x et y sont des abscisses curvilignes d'un même point.

3) $x=\frac{2\pi}{3}$ et $y=\frac{8\pi}{3}$

$$x-y=\frac{2\pi}{3}-\frac{8\pi}{3}=-\frac{-6\pi}{3}=-2\pi=2\times(-1)\times\pi$$

Donc : x et y sont des abscisses curvilignes d'un même point.

4) $x=-\frac{5\pi}{12}$ et $y=\frac{43\pi}{12}$

$$x-y=-\frac{5\pi}{12}-\frac{43\pi}{12}=-\frac{48\pi}{12}=-4\pi=2\times(-2)\times\pi$$

5) $x=-\frac{5\pi}{3}$ et $y=\frac{8\pi}{3}$

$$x-y=-\frac{5\pi}{3}-\frac{8\pi}{3}=-\frac{13\pi}{3}\neq 2\times k\times\pi$$

Donc : x et y ne sont pas des abscisses curvilignes d'un même point.

Exercice8 : (**) Placer sur un cercle trigonométrique d'origine I

Les points d'abscisses curvilignes : $\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Solution :1) Pour placer facilement ces points sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principales de ces points $M_k\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right)$

$\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ Équivalent à : $-\pi\prec\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\leq\pi$

Équivalent à : $-1\prec\frac{1}{3}+\frac{k}{2}\leq 1$

Équivalent à : $-1-\frac{1}{3}\prec\frac{k}{2}\leq 1-\frac{1}{3}$

Équivalent à : $-\frac{4}{3}\prec\frac{k}{2}\leq\frac{2}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{8}{3}\prec k\leq\frac{4}{3}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

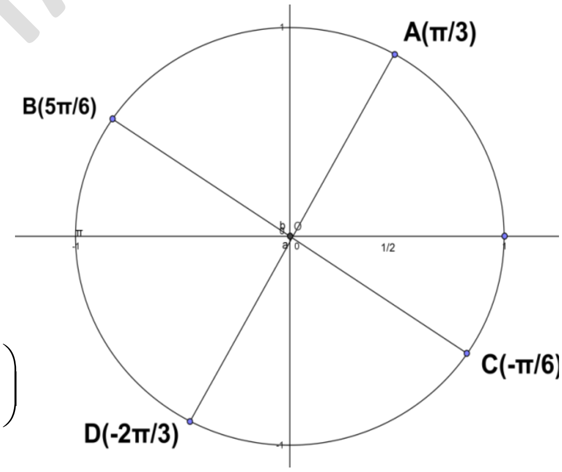
Par suite : $k=-2$ ou $k=-1$ ou $k=0$ ou $k=1$

Si $k=0$ alors : $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Si $k=1$ alors : $B\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire : $B\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Si $k=-1$ alors : $C\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire : $C\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Si $k=-2$ alors : $D\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire : $D\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$



Exercice9 : (**) Soit sur un cercle trigonométrique d'origine I les points A ; B; C; D d'abscisses curvilignes respectifs : $\frac{85\pi}{3}$; $\frac{-139\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{6}$.

1) Placer sur le cercle trigonométrique ces points

2) En déduire les mesures des angles orientés : $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OA}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OB}\right)$; $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OC}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OD}\right)$

Solution :1) Pour placer facilement ces points sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principale de ces points.

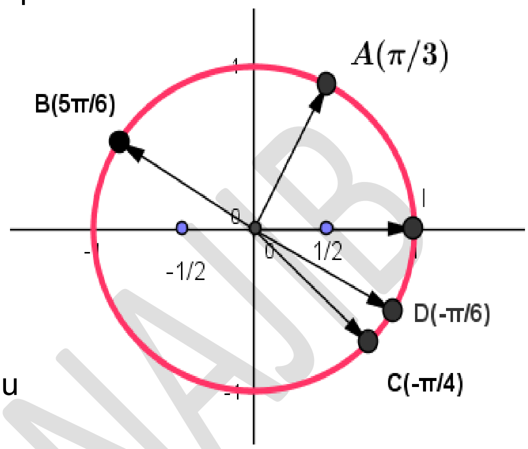
$A\left(\frac{85\pi}{3}\right)$: $\frac{85\pi}{3}=\frac{84\pi+\pi}{3}=\frac{84\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=28\pi+\frac{\pi}{3}$

On a : $\frac{\pi}{3} \in]-\pi ; \pi]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point A

$B\left(\frac{139\pi}{6}\right)$: $\frac{-139\pi}{6} = \frac{-144\pi + 5\pi}{6} = \frac{-144\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = -24\pi + \frac{5\pi}{6}$

On a : $\frac{5\pi}{6} \in]-\pi ; \pi]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point B

$C\left(\frac{7\pi}{4}\right)$: $\frac{7\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4} = \frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$



On a : $-\frac{\pi}{4} \in]-\pi ; \pi]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale

Du point C.

$D\left(\frac{11\pi}{6}\right)$: $\frac{11\pi}{6} = \frac{12\pi - \pi}{6} = \frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$

On a : $-\frac{\pi}{6} \in]-\pi ; \pi]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point D

2) $\left(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$

On a : $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OI}\right) + \left(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}\right) \equiv -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}[2\pi]$ c'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

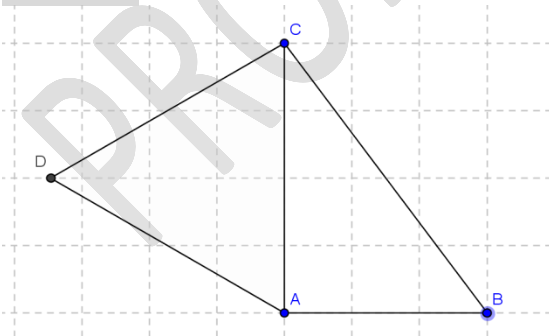
$\left(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OC}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OD}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

Exercice10 : (**) ABC est un triangle rectangle en A direct, tel que $\left(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et ACD est un triangle équilatéral direct.

1) Faire une figure.

2) Déterminer la mesure principale des angles suivant : $\left(\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AB}\right)$; $\left(\overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{AC}\right)$; $\left(\overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{BA}\right)$; $\left(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB}\right)$

Solution :



$\left(\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\equiv -\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

$$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BA}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\pi+\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}[2\pi]\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$$

Dans le triangle ABC on a : $ABC+BAC+ACB=\pi$ donc : $ACB=\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

Donc, vue l'orientation : $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Exercice11 : (**) $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ *et* $\vec{k}$ des vecteurs tel que :

$\left(\vec{u};\vec{v}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$; $\left(\vec{w};\vec{v}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$; $\left(\vec{k};\vec{w}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Déterminer les mesures de l'angle orienté suivant : $\left(\vec{u};\vec{k}\right)$

Solution : $\left(\vec{u};\vec{k}\right)\equiv\left(\vec{u};\vec{v}\right)+\left(\vec{v};\vec{w}\right)+\left(\vec{w};\vec{k}\right)[2\pi]$ (Relation de Chasles)

Donc : $\left(\vec{u};\vec{k}\right)\equiv\frac{\pi}{2}-\left(\vec{w};\vec{v}\right)-\left(\vec{k};\vec{w}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\vec{u};\vec{k}\right)\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $\left(\vec{u};\vec{k}\right)\equiv\frac{7\pi}{12}[2\pi]$

Exercice12 : (**)

Calculer les rapports trigonométriques des nombre réel suivants : 7π , $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$

Solution : $\cos(7\pi)=\cos(\pi+6\pi)=\cos(\pi+2\times3\pi)=\cos(\pi)=-1$ Car : $\cos x=\cos(x+2k\pi)$

$\sin(7\pi)=\sin(\pi+6\pi)=\sin(\pi+2\times3\pi)=\sin(\pi)=0$ Car : $\sin x=\sin(x+2k\pi)$ et $\tan(x+k\pi)=\tan x$

$\tan(7\pi)=\tan(0+7\pi)=\tan(0)=0$ Car : $\tan(x+k\pi)=\tan x$

✓ On a : $\frac{5\pi}{6}=\frac{6\pi-\pi}{6}=\frac{6\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Car : $\cos(\pi-x)=-\cos x$

$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ Car : $Sin(\pi-x)=\sin x$

$\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ Car : $\tan(\pi-x)=-\tan x$

✓ On a : $\frac{7\pi}{6}=\frac{6\pi+\pi}{6}=\frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}$

$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Car : $\cos(\pi+x)=-\cos x$

$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ Car : $Sin(\pi+x)=-\sin x$

$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ Car : $\tan(\pi+x)=\tan x$

✓ On a : $\frac{3\pi}{4}=\frac{4\pi-\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Car : $\cos(\pi-x)=-\cos x$

$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Car : $Sin(\pi-x)=\sin x$

$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$ Car : $\tan(\pi-x)=-\tan x$

Exercice13 : (**) Calculer **:** $A=\sin\left(\frac{53\pi}{6}\right)$; $B=\cos\left(-\frac{29\pi}{6}\right)$; $C=\tan\left(\frac{22\pi}{3}\right)$

$D=\sin(2024\pi)$; $E=\cos\left(\frac{35\pi}{4}\right)$; $F=\tan\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$

$G=\sin\left(-\frac{19\pi}{4}\right)$; $H=\cos\left(\frac{37\pi}{2}\right)$; $K=\tan(2025\pi)$

Solution : $A=\sin\left(\frac{53\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{54\pi-\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{54\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(9\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$A=\sin\left(8\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$B=\cos\left(-\frac{29\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{29\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{30\pi-\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{30\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)$

$B=\cos\left(5\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(4\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$C=\tan\left(\frac{22\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{21\pi+\pi}{3}\right)=\tan\left(7\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

$D=\sin(2024\pi)=\sin(0+2\times1012\pi)=\sin 0=0$

$E=\cos\left(\frac{35\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{36\pi-\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{36\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$

$E=\cos\left(9\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(8\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$F=\tan\left(-\frac{16\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{16\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{15\pi+\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{15\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

$$F=-\tan\left(5\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$$

$G=\sin\left(-\frac{19\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{19\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{20\pi-\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{20\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(5\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$G=-\sin\left(4\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$H=\cos\left(\frac{37\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{36\pi+\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{36\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$

$H=\cos\left(18\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$K=\tan(2025\pi)=\tan(0+2025\pi)=\tan(0)=0$

Exercice14 : (**) Montrer que : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ si : $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

Solution : $1+(\tan x)^2=1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2=1+\frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2}=\frac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2}$

Et on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ donc : $1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$

Exercice15 : (**) On a : $\sin x=-\frac{4}{5}$ et $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

Calculer : $\cos x$ et $\tan x$

Solution : On a **:** $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ donc $(\cos x)^2+\frac{16}{25}=1$

Donc $(\cos x)^2=1-\frac{16}{25}$ c'est à dire **:** $(\cos x)^2=\frac{9}{25}$

Donc : $\cos x=\sqrt{\frac{9}{25}}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{25}}$

Donc : $\cos x=\frac{3}{5}$ ou $\cos x=-\frac{3}{5}$

Or on a $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos x\geq 0$ et par suite : $\cos x=\frac{3}{5}$

On a : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{-4}{3}$.

Exercice16 : (**) On a : $\tan(x)=\frac{1}{3}$ et $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

Calculer : 1) $\cos x$ 2) $\sin x$

Solution : 1) on a : $1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$ donc $1+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 x}$

Donc $1+\frac{1}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$ c'est-à-dire : $\frac{10}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$

Donc $10\cos^2 x=9$ c'est-à-dire : $\cos^2 x=\frac{9}{10}$

Donc $\cos x=\sqrt{\frac{9}{10}}$ et $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}$

Et on a $\frac{\pi}{2}<x<\pi$: donc $\cos x\leq 0$ et par suite : $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2) On a $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$: donc $\sin x=\tan x\times\cos x$

Donc : $\sin x=-\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

Exercice17 : (*) 1) Calculer en fonction de : $\sin x$ et $\cos x$ les expressions suivantes :

$A(x)=\sin(-x)-\cos(-x)$

$B(x)=\sin(\pi+x)+\cos(\pi+x)$

$C(x)=\sin(3\pi+x)+\cos(2\pi+x)$

$D(x)=\cos(\pi+x)+\sin(-x)+\sin(x-4\pi)$

Solution : 1) $A(x)=\sin(-x)-\cos(-x)$

$A(x)=-\sin x-\cos x=-(\sin x+\cos x)$

$B(x)=\sin(\pi+x)+\cos(\pi+x)$

$B(x)=-\sin x-\cos x=-(\sin x+\cos x)$

$C(x)=\sin(3\pi+x)+\cos(2\pi+x)$

$C(x)=\sin(2\pi+\pi+x)+\cos x$

$C(x)=\sin(\pi+x)+\cos x=-\sin x+\cos x$

$D(x)=\cos(\pi+x)+\sin(-x)+\sin(x-4\pi)$

$D(x)=-\cos x-\sin x+\sin x$

$D(x)=-\cos x$

Exercice18 : (**)1) Calculer en fonction de : $\sin x$ et $\cos x$ les expressions suivantes :

$A(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(3\pi-x)+\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$B(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$

$C(x)=\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)-2\sin(\pi-x)+4\sin(\pi+x)$

Solution : 1) $A(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(3\pi-x)+\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$A(x)=\cos x+\cos(2\pi+\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$A(x)=\cos x+\cos(\pi-x)-\cos x$

$A(x)=\cos x-\cos x-\cos x$

$A(x)=-\cos x$

$B(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$

$B(x)=-\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(x-2\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$B(x)=-\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ donc : $B(x)=-\sin x$

$C(x)=\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)-2\sin(\pi-x)+4\sin(\pi+x)$

$C(x)=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)-2\sin(x)-4\sin x$

$C(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-6\sin(x)=\sin x-6\sin x=-5\sin x$

Exercice19 : (***) 1) Simplifier l'expression suivante :

$$A(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos(-x+6\pi)+\cos(3\pi+x)+\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)$$

1) Montrer que : $A(x)=\cos^2 x-\cos x$

2) Calculer $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$

3)a) Calculer en fonction de $\sin x$ le nombre : $A=\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(4\pi-x)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$.

b) En déduire la valeur de A si $\tan x=3$

Solution :1) $A(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos(-x+6\pi)+\cos(3\pi+x)+\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)$

$A(x)=\cos^2 x-\cos(-x)+\cos(2\pi+\pi+x)+\sin\left(x-4\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $A(x)=\cos^2 x-\cos(-x)+\cos(\pi+x)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$A(x)=\cos^2 x-\cos x-\cos x+\cos x$

Donc : $A(x)=\cos^2 x-\cos x$

2) Calcul de $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$: on a : $A(x)=\cos^2 x-\cos x$

Donc : $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc : $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

Calcul de $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$: $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(-\frac{10\pi}{3}\right)-\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$

$A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(\frac{10\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos^2\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

3)a) Calculons en fonction de : $\sin x$ le nombre : $A=\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(4\pi-x)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$

$$A=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(-x)}{\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}}=\frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos x}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$$

Donc : $A=\dfrac{\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cos(-x)}{\dfrac{\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)}}=\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cos x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}$

Donc : $A=\dfrac{\sin^2 x\cos x}{-\cos x}=-\sin^2 x$

b) Déduction de la valeur de A si $\tan x=3$

On sait que : $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ et $\cos^2 x\tan^2 x=\sin^2 x$

Donc : $\sin^2 x=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}\tan^2 x$ et puisque : $\tan x=3$ alors :

$A=-\sin^2 x=-\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=-\dfrac{9}{1+9}=-\dfrac{9}{10}$

Exercice20 : (**)1) Sachant que : $\cos\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$, calculer la valeur de $\sin\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)$

2) En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

Solution :1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ donc : $\cos^2\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)=1-\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)$

Donc : $\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)=1-\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2=1-\dfrac{5+2\sqrt{5}+1}{16}$ C'est-à-dire : $\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)=\dfrac{10-2\sqrt{5}}{16}$

Donc : $\sin\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)=\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{5}}{16}}$ ou $\sin\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)=-\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{5}}{16}}$

De plus on a : $\dfrac{9\pi}{5}\in\left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right[$ donc : $\sin\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)\prec 0$

Par suite : $\sin\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)=-\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

2) $\cos\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)=\cos\left(\dfrac{10\pi-\pi}{5}\right)=\cos\left(\dfrac{10\pi}{5}-\dfrac{\pi}{5}\right)=\cos\left(2\pi-\dfrac{\pi}{5}\right)$

Donc : $\cos\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

De même on a : $\sin\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)=\sin\left(\dfrac{10\pi-\pi}{5}\right)=\sin\left(\dfrac{10\pi}{5}-\dfrac{\pi}{5}\right)=\sin\left(2\pi-\dfrac{\pi}{5}\right)$

Donc : $\sin\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et donc : $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=-\sin\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Exercice21 : (***) Simplifier les expressions suivantes :

$A=\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)-2\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{10}\right)$

$B=\cos^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{8}+\cos^2\dfrac{5\pi}{8}$

$C=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$

Solution :1) $A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}-2\sin\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{10}$

On remarque que : $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}=\pi$ donc : $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}=\pi-\frac{\pi}{5}$

Donc : $A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)-2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)$

$$A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=0$$

2) $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

On remarque que : $\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi$ et $\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi$ donc : $\frac{7\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$ et $\frac{5\pi}{8}=\pi-\frac{3\pi}{8}$

Donc : $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$

$$B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left(-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left(-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\cos^2\frac{3\pi}{8}$$

$B=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$ Et puisque on a aussi : $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

Alors : $B=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\times1=2$

$$C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{9\pi}{12}+\sin^2\frac{11\pi}{12}$$

On remarque que : $\frac{\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}=\pi$ donc : $\frac{11\pi}{12}=\pi-\frac{\pi}{12}$.

Et on a : $\frac{3\pi}{12}+\frac{9\pi}{12}=\pi$ donc $\frac{9\pi}{12}=\pi-\frac{3\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}=\pi$ donc $\frac{7\pi}{12}=\pi-\frac{5\pi}{12}$

Donc on a : $C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\left(\pi-\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)$

$$C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$C=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{3\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}+2\sin^2\frac{\pi}{4}$$

$$C=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{3\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}\right)+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Et on remarque aussi que $\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$ c'est à dire : $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$

$$C=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right)+1=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)+1=2\times1+1=3$$

Exercice22 : (**) Simplifier les expressions suivantes : $x \in \mathbb{R}$

$A=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$

$B=\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x-\cos^2 x$

$C=\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x$

$D=\sin^6 x+\cos^6 x+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$

Solution : $A=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$

$A=\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x$

$A=2\cos^2 x+2\sin^2 x=2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=2\times 1=2$ $B=\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x-\cos^2 x$

$B=\cos^4 x-\cos^2 x-\sin^4 x+\sin^2 x$

$B=\cos^2 x\left(\cos^2 x-1\right)-\sin^2 x\left(\sin^2 x-1\right)$

On a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\cos^2 x-1=-\sin^2 x$ et $\sin^2 x-1=-\cos^2 x$

$B=\cos^2 x\times\left(-\sin^2 x\right)-\sin^2 x\left(-\cos^2 x\right)$

$B=-\cos^2 x\times\sin^2 x+\sin^2 x\cos^2 x=0$

$C=\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x$

$C=\left(\sin^2 x\right)^2-\left(\cos^2 x\right)^2+2\cos^2 x$

$C=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)+2\cos^2 x$

$C=\sin^2 x-\cos^2 x+2\cos^2 x$

$C=\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$D=\sin^6 x+\cos^6 x+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$

$D=\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$

$D=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$

$D=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$

$D=2\sin^4 x+4\sin^2 x\cos^2 x+2\cos^4 x$

$D=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=2\times 1=2$

Exercice23 : (***) Ecrire seulement en fonction de $\tan x$ les expressions suivantes :

1) $A=\dfrac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x+\cos x}$ 2) $B=\dfrac{\sin^2 x+3\sin x\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$ 3) $C=\cos^2 x-\sin x\cos x$

Solution : 1) $A=\dfrac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x+\cos x}$ On a : $\sin x=\tan x\times\cos x$

Donc : $A=\dfrac{\tan^3 x\times\cos^3 x-\cos^3 x}{\tan x\times\cos x+\cos x}$

Donc : $A=\dfrac{\cos^3 x\left(\tan^3 x-1\right)}{\cos x\left(\tan x+1\right)}$

Donc : $A=\cos^2 x\dfrac{\tan^3 x-1}{\tan x+1}$ or on a : $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

Donc : $A=\dfrac{1}{\tan^2 x+1}\dfrac{\tan^3 x-1}{\tan x+1}=\dfrac{\tan^3 x-1}{\left(\tan^2 x+1\right)\left(\tan x+1\right)}$

2) $B=\dfrac{\sin^2 x+3\sin x\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$

$$B=\frac{\tan^2 x\times\cos^2 x+3\tan x\times\cos x\cos x}{\tan^2 x\times\cos^2 x-\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x\left(\tan^2 x+3\tan x\right)}{\cos^2 x\left(\tan^2 x-1\right)}$$ etp ar suite : $B=\frac{\tan^2 x+3\tan x}{\tan^2 x-1}$

3) On a : $\sin x=\tan x\times\cos x$ donc : $C=\cos^2 x-\tan x\times\cos x\cos x$

Donc : $C=\cos^2 x\left(1-\tan x\right)$ or $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$

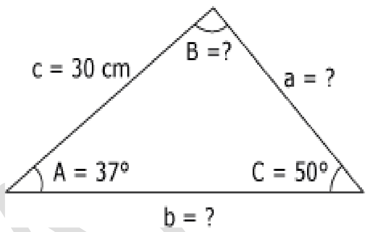
Donc : $C=\frac{1}{1+\tan^2 x}\left(1-\tan x\right)=\frac{1-\tan x}{1+\tan^2 x}$

Exercice24 : (**) A partir du triangle de la figure suivante, trouvez :

a) la valeur du côté a

b) la mesure de l'angle B ;

c) la valeur du côté b.



Solution : Nous connaissons la valeur de deux angles et d'un côté du triangle : A= 37° et côté c = 30 cm et C = 50°

a) Calcul de la valeur du côté a : il s'agit donc d'application de la loi des sinus.

La loi des sinus nous permet d'établir la relation suivante : $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$

Isolons-le côté a : $a=\frac{c\sin A}{\sin C}$ donc : $a=\frac{30\sin 37^\circ}{\sin 50^\circ}\simeq\frac{30\times 0,6018}{0,7660}\simeq 23,569cm$

b) Calcul de la valeur de l'angle B

Comme nous connaissons la valeur de deux des angles du triangle, il est possible de trouver la valeur du troisième : B = 180° - ($A+C$)

B = 180° - (50° + 37°) donc : B = 93 °

c) Calcul de la valeur du côté b

De la loi des sinus, nous tirons la relation suivante : $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

Isolons le côté b : $b=\frac{c\sin B}{\sin C}$ donc : $b=\frac{30\sin 30^\circ}{\sin 50^\circ}\simeq\frac{30\times 0,9986}{0,7660}\simeq 39,11cm$ c'est-à-dire :b = 39,11 cm

Exercice25 : (**) ABC un triangle tel que : $BC=\sqrt{3}$ et $BCA=\frac{\pi}{4}$ et $BAC=\frac{\pi}{3}$

1) Calculer : AB

2) a) Vérifier que : $ABC=\frac{5\pi}{12}$

b) Calculer : $\sin\frac{5\pi}{12}$ sachant que : $AC=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ et en déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$

Solution : Nous connaissons la valeur de deux angles et d'un côté du triangle :

$BCA=\frac{\pi}{4}$ et côté $BC=\sqrt{3}$ et $BAC=\frac{\pi}{3}$

Il s'agit donc d'application de la loi des sinus.

La loi des sinus nous permet d'établir la relation suivante : $\frac{\sin BAC}{BC}=\frac{\sin BCA}{AB}$

Isolons-le côté AB : $AB=\frac{BC\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2}$

2) a) Vérifions que : $ABC=\frac{5\pi}{12}$

Comme nous connaissons la valeur de deux des angles du triangle, il est possible de trouver la valeur du troisième : On a $A+B+C=\pi$ donc : $B=\pi-\left(A+C\right)$

Donc : $B=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $B=\pi-\frac{7\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$

b) Calcul de : $\sin\frac{5\pi}{12}$

D'après la loi des sinus dans le triangle ABC on a : $\frac{\sin B}{AC}=\frac{\sin A}{BC}$ c'est-à-dire : $\frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{AC}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{BC}$

Donc : $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Déduction de la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$: On a $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien