Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°2 :

Equations et inéquations et systèmes partie3 : Equation du second degré

Exercice1 : (*) et (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :1) $x^2=16$ 2) $x^2=-8$

3) $(x+2)^2=9$ 4) $5x^2-4x=0$ 5) $3x^2-x-2=0$ (On peut utiliser l'écriture canonique)

6) $x^2-9+5(x+3)=0$

Solution :1) L'équation : $x^2=16$

16 est positif donc l'équation admet deux solutions $x=\sqrt{16}=4$ et. $x=-\sqrt{16}=-4$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-4;4\}$

2) L'équation : $x^2=-8$ -8 est négatif donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Donc : $S=\varnothing$

3) L'équation : $(x+2)^2=9$

On a alors $x+2=3$ ou . $x+2=-3$

L'équation admet deux solutions $x=1$ et $x=-5$.Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-5;1\}$

4) $5x^2-4x=0$ Signifie que : $x(5x-4)=0$

Soit : $x=0$ ou $5x-4=0$ c'est-à-dire : $x=0$ ou $x=\frac{4}{5}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{0;\frac{4}{5}\right\}$

5) $3x^2-x-2=0$: On va d'abord Factoriser les trinômes $3x^2-x-2$

$$3x^2-x-2=3\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=3\left(x^2-2\frac{1}{2\times3}x+\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2-\frac{2}{3}\right)$$

$$3x^2-x-2=3\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=3\left(\left(x-\left(\frac{1}{6}\right)\right)^2-\frac{25}{36}\right)$$

$$3x^2-x-2=3\left(\left(x-\left(\frac{1}{6}\right)\right)^2-\frac{25}{36}\right)$$ Cette écriture s'appelle la forme canonique

$$3x^2-x-2=3\left(x-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)\left(x-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)=3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

Donc : $3x^2-x-2=3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$ la forme factorisée

$3x^2-x-2=0$ Signifie que : $(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)=0$

On a alors $x-1=0$ ou $x+\frac{2}{3}=0$

L'équation admet deux solutions $x=1$ et $x=-\frac{2}{3}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{-\frac{2}{3};1\right\}$

6) $x^2-9+5(x+3)=0$ Signifie que : $x^2-3^2+5(x+3)=0$ Signifie que : $(x+3)(x-3)+5(x+3)=0$

Signifie que : $(x+3)\left[(x-3)+5\right]=0$ Signifie que : $(x+3)(x+2)=0$ Signifie que : $x+3=0$ ou $x+2=0$

Signifie que : $x=-3$ ou $x=-2$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-3;-2\}$

Exercice2 : (**) Déterminer la forme canonique des trinômes suivants :

1) $5x^2+20x-65$ 2) $3x^2-x-2$

Solution :1) Pour écrire $5x^2+20x-65$ sous forme canonique on commence par factoriser le trinôme par le coefficient qui est devant x^2 : On obtient $5(x^2+4x-13)$

Puis on doit transformer : $x^2+4x-13$ en factorisant avec les identités remarquables :

Pour cela on utilise les deux premiers termes de $x^2+4x-13$ (x^2 correspond à a² et $4x$ à 2ab)

Donc : $a=x$ et $2ab=4x$ c'est-à-dire : $b=2$.

Donc : $x^2+4x-13=(x+2)^2-...-13$

Si on développe $(x+2)^2$ on obtient x^2+4x+4

Pour avoir seulement x^2+4x on doit retrancher 4.

Donc : $x^2+4x-13=(x+2)^2-4-13=(x+2)^2-17$

Donc : $5x^2+20x-65=5\left[(x+2)^2-17\right]$

Donc : $5x^2+20x-65=5(x+2)^2-85$

$5(x+2)^2-85$ est la forme canonique de $5x^2+20x-65$

2) $3x^2-x-2$: Autre méthode pour déterminer la forme canonique :

Calculons le discriminant de : $3x^2-x-2=ax^2+bx+c$: $a=3$; $b=-1$; $c=-2$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-1)^2-4\times3\times(-2)=1+24=25>0$

La forme canonique de : ax^2+bx+c en générale est :

$ax^2+bx+c=a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ Avec $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a^2}$

La forme canonique de $3x^2-x-2$ est:

$3x^2-x-2=3\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\times3}=\frac{1}{6}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a^2}=-\frac{25}{4\times3^2}=-\frac{25}{36}$

Donc : $3x^2-x-2=3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{36}$: La forme canonique

Exercice3 : (*) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et Factoriser les trinômes :

a) $2x^2-x-6=0$ b) $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$ c) $x^2+3x+10=0$ d) $6x^2-x-1=0$

Solution :a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-x-6=0$: a = 2, b = -1 et c = -6

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times2}=-\frac{3}{2}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times2}=2$ donc : $S=\left\{-\frac{3}{2};2\right\}$

Et le trinôme $2x^2-x-6$ a une forme factorisée : $2x^2-x-6=a\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)(x-2)$

C'est-à-dire : $2x^2-x-6=a\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2)$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$: a = 2, b = -3 et c = $\frac{9}{8}$

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2\times 2}=\frac{3}{4}$

Donc : $S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$ et le trinôme $2x^2-3x+\frac{9}{8}$ a une forme factorisée : $2x^2-3x+\frac{9}{8}=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2+3x+10=0$: a = 1, b = 3 et c = 10
Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.
Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle c'est-à-dire : $S=\varnothing$

d) $6x^2-x-1=0$. On a : $\Delta=1+24=25$: $x_1=\frac{1+5}{12}=\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{1-5}{12}=-\frac{1}{3}$

Donc : $S=\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}$ par suite : $R(x)=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

Exercice4 : (*) Factoriser les trinômes : a) $4x^2+19x-5$ b) $9x^2-6x+1$

Solution : a) On cherche les racines du trinôme $4x^2+19x-5$:
Calcul du discriminant : $\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$

Les racines sont : $x_1=\frac{-19-\sqrt{441}}{2\times 4}=-5$ et $x_2=\frac{-19+\sqrt{441}}{2\times 4}=\frac{1}{4}$

On a donc : $4x^2+19x-5=4(x-(-5))\left(x-\frac{1}{4}\right)=(x+5)(4x-1)$.

b) On cherche les racines du trinôme $9x^2-6x+1$:Calcul du discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$

Comme $\Delta = 0$, le trinôme possède une seule racine (dite racine double): $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\times 9}=\frac{1}{3}$:

Et le trinôme $9x^2-6x+1$ a une forme factorisée : $9x^2-6x+1=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$

Exercice5 : (***) Soit le trinôme (T): $-2x^2+\sqrt{2}x+2$

1) Prouver que le trinôme (T) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha+\beta$; $\alpha\times\beta$; $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$; $\alpha^2+\beta^2$; $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha^3+\beta^3$

Solution : 1) : $a=-2$ **et** **et** $b=\sqrt{2}$ **et** $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{2}\right)^2-4\times 2\times(-2)=2+16=18>0$

Comme $\Delta > 0$: le trinôme (T): a deux racines distinctes : α et β

2) on a : $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ et $\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$ donc $\alpha+\beta=-\frac{\sqrt{2}}{-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha\times\beta=\frac{2}{-2}=-1$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ donc $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$ c'est-à-dire : $\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

On a : $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}$ donc $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\frac{5}{2}}{-1}=-\frac{5}{2}$

On a : $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ donc $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2$

donc $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

donc $\alpha^3+\beta^3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-3(-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=\frac{\sqrt{2}^3}{2^3}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}+12\sqrt{2}}{8}=\frac{14\sqrt{2}}{8}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$

Exercice6 : (**) Donner une équation du second degré qui a pour solutions : α et β dans les cas suivants :1) $\alpha=1$ et $\beta=-2$ 2) $\alpha=-1$ et $\beta=\sqrt{2}$ 3) $\alpha=-\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{1}{3}$

Solution : On sait que : Si x_1 et x_2 sont les racines du trinôme alors ils sont solutions de l'équation :

$x^2-sx+p=0$ avec : $\begin{cases} x+y=s \\ x\times y=p \end{cases}$

1) On a : $\alpha=1$ et $\beta=-2$ solutions de l'équation du second degré donc : $x^2-(1+(-2))x+1\times(-2)=0$

C'est-à-dire : $x^2+x-2=0$

2) On a : $\alpha=-1$ et $\beta=\sqrt{2}$ solutions de l'équation du second degré donc : $x^2-(-1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}\times(-1)=0$

C'est-à-dire : $x^2+(1-\sqrt{2})x-\sqrt{2}=0$

3) On a : $\alpha=-\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{1}{3}$ solutions de l'équation du second degré

Donc : $x^2-\left(\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)\right)x+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ signifie que : $x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}=0$

C'est-à-dire : $6x^2-x-1=0$

Exercice7 : (***) Sans calculer le discriminant Δ résoudre les équations suivantes :

1) $x^2+x-6=0$ 2) $4x^2+2(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$

Solution : On sait que : les solutions de l'équation : $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\times\beta=0$ sont : $x_1=\alpha$ et $x_2=\beta$

1) $x^2+x-6=0$ signifie que : $x^2-(2+(-3))x+2\times(-3)=0$

C'est-à-dire : $x_1=2$ et $x_2=-3$ par suite : $S=\{-3;2\}$

2) $4x^2+2(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$ signifie que : $x^2+\frac{2(\sqrt{2}-1)}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{4}=0$

Signifie que : $x^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)x-\frac{\sqrt{2}}{4}=0$ c'est-à-dire : $x^2-\left(\frac{1}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)x+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

C'est-à-dire : $x_1=\frac{1}{2}$ et $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ par suite : $S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}\right\}$

Exercice8 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) ; $\frac{x^2-3x+4}{x+5}=2$

Corrigé : Partie1 : L'ensemble de définition de l'équation (E) est donc $D_E=\{-5\}$.

Partie2 : $\frac{x^2-3x+4}{x+5}=2$ Equivaut à : $\frac{x^2-3x+4}{x+5}-2=0$

Equivaut à : $\frac{x^2-3x+4}{x+5}-\frac{2x+10}{x+5}=0$

Equivaut à : $\frac{x^2-5x-6}{x+5}=0$

Equivaut à : $x^2-5x-6=0$

$\Delta = 49 > 0$ donc $x^2-5x-6=0$ admet deux solutions Distinctes $x_1=-1$ et $x_2=6$

Ainsi, l'ensemble solution de (E) est S = {−1 ; 6} (car les solutions trouvées sont différentes de −5).

Exercice9 : (***) Combien mesure la longueur d'un rectangle de périmètre 56 cm et d'aire 192 cm²?

Réponse : Posons l="la longueur du rectangle" et L="la largeur du rectangle"

On doit résoudre le système : $\begin{cases} 2l+2L=56 \\ l\times L=192 \end{cases}$

Isolons L dans la première équation : On a : $2l+2L=56$ donc $2L=56-2l$ c'est-à-dire : $L=\frac{56-2l}{2}$

Donc : $L=28-l$

Remplaçons maintenant cette valeur de L dans la deuxième équation.

$l\times L=192$ Donc : $l\times(28-l)=192$

Donc : $28l-l^2=192$ Donc : $-l^2+28l-192=0$: on obtient une équation du deuxième degré.

Calculons delta : $\Delta=28^2-4\times(-1)\times(-192)=784-768=16$

L'équation admet donc deux solutions :

$l_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-28-\sqrt{16}}{-2}=\frac{-28-4}{-2}=\frac{-32}{-2}=16$ Et $l_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-28+\sqrt{16}}{-2}=\frac{-28+4}{-2}=\frac{-24}{-2}=12$

Les deux valeurs possibles pour la longueur sont 16 et 12.

Le produit de ces deux nombres vaut 192

Donc 16 et 12 correspondent bien à la longueur et à la largeur du rectangle.

La longueur de ce rectangle mesure donc 16 centimètres.

Exercice10 : (***) A)1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $2x^2-3x-2=0$

2) En déduire les solutions des équations suivantes :

a) $2x-3\sqrt{x}-2=0$ b) $2x^2-3|x|-2=0$ c) $2x^4-3x^2-2=0$ d) $2x^3-3x^2=2x$

B) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x^2+x-6=0$ et $x^2-x-2=0$

2) En déduire les solutions de l'équation suivante :

$(E): x^2-|x-2|-4=0$

Solution : A)1) $2x^2-3x-2=0$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-3x-2=0$: a = 2, b = -3 et c = - 2

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times2}=-\frac{1}{2}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times2}=2$ Donc : $S=\left\{-\frac{1}{2};2\right\}$

2) 2) $2x-3\sqrt{x}-2=0$ avec $x\geq0$

$2x-3\sqrt{x}-2=0$ Equivalent a : $2\left(\sqrt{x}\right)^2-3\sqrt{x}-2=0$ car $\sqrt{x}^2=x$

Faisons un changement de variable en posant : $X=\sqrt{x}$
Nous obtenons l'équation : $2X^2-3X-2=0$

Donc : d'après A) 1) on a : $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=2$

Equivalent à : $\sqrt{x}=-\frac{1}{2}$ ou $\sqrt{x}=2$

Mais l'équation : $\sqrt{x}=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sqrt{x}=2$ Signifie : $\left(\sqrt{x}\right)^2=2^2$ c'est-à-dire : $x=4$ et par suite : $S=\{4\}$.

2) b) $2x^2-3|x|-2=0$ Equivalent à : $2|x|^2-3|x|-2=0$ car $|x|^2=x^2$
Faisons un changement de variable en posant : $X=|x|$ nous obtenons l'équation : $2X^2-3X-2=0$

Donc : d'après A) 1) on a : $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=2$ qui est équivalent a: $|x|=-\frac{1}{2}$ ou $|x|=2$

Mais l'équation : $|x|=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$|x|=2$ Signifie : $x=2$ ou $x=-2$ par suite : $S=\{-1;1\}$

2) c) $2x^4-3x^2-2=0$ Equivalent a: $2\left(x^2\right)^2-3x^2-2=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$ nous obtenons donc : l'équation : $2X^2-3X-2=0$
Donc : d'après A) 1) on a: $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=2$ et par suite : $x^2=-\frac{1}{2}$ ou $x^2=2$

Mais l'équation : $x^2=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$x^2=2$ Signifie : $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$ par suite : $S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$.

d) $2x^3-3x^2=2x$ Equivalent à : $2x^3-3x^2-2x=0$
Equivalent à : $x\left(2x^2-3x-2\right)=0$

Equivalent à : $x=0$ ou $2x^2-3x-2=0$

Equivalent à : $x=0$ ou $x_1=-\frac{1}{2}$ ou $x_2=2$ et par suite : $S=\left\{-\frac{1}{2};0;2\right\}$.

B) 1) Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes : $x^2+x-6=0$ et $x^2-x-2=0$
Calculons le discriminant de l'équation $x^2+x-6=0$: a = 1, b = 1 et c = - 6
Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{25}}{2\times 1}=-3$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\times 1}=2$ Donc : $S=\{-3;2\}$
Calculons le discriminant de l'équation $x^2-x-2=0$: a = 1, b = -1 et c = - 2
Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{9}}{2\times 1}=-1$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{9}}{2\times 1}=2$ Donc : $S=\{-1;2\}$

2) Déduction des solutions de l'équation suivante : $(E): x^2 - |x-2| - 4 = 0$

Etudions le signe de : $x-2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

Si $x \geq 2$ alors $x-2 \geq 0$ donc : $|x-2| = x-2$

Donc : l'équation devient : $x^2 - (x-2) - 4 = 0$

Signifie : $x^2 - x + 2 - 4 = 0$ c'est-à-dire : $x^2 - x - 2 = 0$

Or : d'après B) 1) $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$ mais : $x_1 = -1 \notin [2;+\infty[$ donc : $S_1 = \{2\}$

Si $x \prec 2$ alors $x-2 \leq 0$ donc : $|x-2| = -(x-2) = -x+2$

Donc : l'équation devient : $x^2 + (x-2) - 4 = 0$ c'est à dire : $x^2 + x - 2 - 4 = 0$

Signifie : $x^2 + x - 6 = 0$ Or : d'âpres B) 1) $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$

Mais : $x_2 = 2 \notin]-\infty; 2[$ Donc : $S_2 = \{-3\}$

Par suite : $S = S_1 \cup S_2 = \{-3; 2\}$.

Exercice11 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ 2) $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$

Solution : 1) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

Faisons un changement de variable en posant : $X = x^2$ nous obtenons l'équation : $X^2 - 2X + 1 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \text{ x } 1 \text{ x } 1 = 4 - 4 = 0$

La solution double de : $X^2 - 2X + 1 = 0$ est : $X = \frac{-(-2)}{2\times 1} = \frac{2}{2} = 1$ Donc on a : $x^2 = 1$

Donc : $x = 1$ ou $x = -1$ et par suite : $S = \{-1; 1\}$

2) $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$

Faisons un changement de variable en posant : $X = x^2$

Nous obtenons l'équation : $3X^2 - 2X - 1 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \text{ x } 3\text{x } (-1) = 4 + 12 = 16$

Les solutions de : $3X^2 - 2X - 1 = 0$ sont : $X_1 = \frac{-(-2)+4}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$ et $X_2 = \frac{-(-2)-4}{2\times 3} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$

Donc : $x^2 = 1$ et $x^2 = \frac{-1}{3}$

Or l'équation : $x^2 = \frac{-1}{3}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

Donc : on a $x = 1$ ou $x = -1$ par suite : $S = \{-1; 1\}$

Exercice12 : (**) Factoriser les expressions suivantes : 1) $x^4 - 10x^2 + 25$ 2) $x^4 - 5x^2 + 6$

Solution : 1) $x^4 - 10x^2 + 25$ On pose : $X = x^2$

Donc : l'équation devient : $X^2 - 10X + 25$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4\times 1\times(25) = 100 - 100 = 0$

Puisque : $\Delta = 0$ alors le trinôme admet une racine double : $x_1 = \frac{-(-10)}{2\times 1} = \frac{10}{2} = 5$ donc : $X = \frac{-(-10)}{2\times 1} = 5$

Par suite la factorisation est : $X^2 - 10X + 25 = a(X - X_1)^2$

Donc : $X^2 - 10X + 25 = (X-5)^2$

Donc : $x^4-10x^2+25=\left(x^2-5\right)^2=\left(x-\sqrt{5}\right)^2\left(x+\sqrt{5}\right)^2$

2) x^4-5x^2+6 On pose : $X=x^2$

X^2-5X+6 $\Delta=(-5)^2-4\times1\times6=25-24=1$

Donc : $X_1=\frac{-(-5)+1}{2\times1}=3$ et $X_2=\frac{-(-5)-1}{2\times1}=\frac{4}{2}=2$

Donc : $X^2-5X+6=(X-2)(X-3)$

Donc : $x^4-5x^2+6=\left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right)$

Par suite : $x^4-5x^2+4=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$

Exercice13 : (***) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2-7x-8=0$

2) En déduire les solutions de l'équation suivante : $x^6-7x^3-8=0$

Solution : 1) Calculons le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=81\succ0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{7-9}{2}=-1$ et $x_2=\frac{7+9}{2}=8$ donc : $S=\{-1;8\}$

2) $x^6-7x^3-8=0$ Signifie que : $\left(x^3\right)^2-7\left(x^3\right)-8=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^3$; nous obtenons l'équation : $X^2-7X-8=0$

Donc : d'après 1) on a : $X=-1$ ou $X=8$

Donc : $x^3=-1$ ou $x^3=8$.

Equivalent a: $x=-1$ ou $x=2$ par suite : $S=\{-1;2\}$

Exercice14 : (***) (Equations avec des racines carrées)

Résoudre dans $\mathbb{R}$; l'équation suivante : $\sqrt{x-1}=x$

Corrigé : Remarque : La relation $a=b\Leftrightarrow a^2=b^2$ n'est pas vraie si les deux nombres sont de signes contraires.

a) L'équation est définie si $x-1\geq0$ Signifie que : $x\geq1$

L'équation est donc définie sur : $D_E=[1,+\infty[$

b) Je travaille par équivalence en m'assurant que les deux membres sont positifs avant d´élever au carré.

$\sqrt{x-1}=x$ Signifie que : $\sqrt{x-1}^2=x^2$ et $x\geq0$

Signifie que : $x-1=x^2$ et $x\geq0$

Signifie que : $x^2-x+1=0$ et $x\geq0$

Le discriminant de : $x^2-x+1=0$ est : $\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$ donc pas de solutions

Par conséquent : $S=\varnothing$

Exercice15 : (***) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre m l'équation suivante :

$mx^2-2(m+2)x+m+3=0$

Corrigé : $mx^2-2(m+2)x+m+3=0$

1ére cas : $m=0$ L'équation devient : $-4x+3=0$ c'est à dire : $x=\frac{3}{4}$ et Par suite : $S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$

2ére cas : $m\neq0$ c'est une équation du second degré :

$\Delta'=b'^2-ac=(m+2)^2-m\times(m+3)=m^2+4m+4-m^2-3m=m+4$

Si : $m=-4$ alors : $\Delta'=0$

Donc : L'équation admet une solution unique : $x=\frac{-b'}{a}=\frac{m+2}{m}=\frac{-4+2}{-4}=\frac{1}{2}$ par suite : $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Si : $m\succ-4$ ($m\neq0$) alors : $\Delta'\succ0$ L'équation admet donc deux solutions :

$$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{m+2-\sqrt{m+4}}{m} \text{ Et } x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{m+2+\sqrt{m+4}}{m}$$

Par suite : $S=\left\{\frac{m+2-\sqrt{m+4}}{m};\frac{m+2+\sqrt{m+4}}{m}\right\}$

Si : $m\prec -4$ alors : $\Delta'\prec 0$ l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Donc : $S=\varnothing$

Exercice16 : (*) Résoudre les inéquations suivantes :

a) $2x^2-3x+1\geq 0$ b) $-2x^2+4x-2\geq 0$ c) $3x^2+6x+5<0$

Solution : a) $2x^2-3x+1\geq 0$ $a=2$

Calculons le discriminant : a = 2, b = -3 et c = 1 donc

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times 2\times 1=9-8=1>0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{3+1}{4}=1$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2a}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

b) $-2x^2+4x-2\succ 0$

Étudions le signe du trinôme de : $P(x)=-2x^2+4x-2$ $a=-2$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times(-2)\times(-2)=16-16=0$

Comme Δ = 0, le trinôme possède une racine double: $x_1=\frac{-(4)}{2\times(-2)}=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2x^2+4x-2$		$-$	0	$-$	

Donc : $S=\varnothing$

c) $3x^2+6x+5>0$. Étudions le signe du trinôme $P(x)=3x^2+6x+5$ $a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times 3\times 5=36-60=-24<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$3x^2+6x+5$		$+$	

Donc : $S=\mathbb{R}$

Exercice17 : (***)

Soit un rectangle de 6 cm par 10 cm. De combien de cm peut-on augmenter sa largeur et sa longueur pour que son périmètre reste inférieur à 96 cm ?

Corrigé : Soit x la longueur ajoutée à la longueur et à la largeur. Le nouveau périmètre devient :

$2(longueur+l\arg eur)=2((10+x)+(x+6))=2(2x+16)=4x+32$

Ce périmètre reste inférieur à 96 si : $4x+32<96\Leftrightarrow 4x<96-32\Leftrightarrow x<16$

On ne peut allonger les longueur et largeur de plus de 16 cm si on souhaite un périmètre inférieur à 96 cm

Exercice18 : Déterminer le signe des expressions suivantes :

1) $B(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{3}$ 2) $D(x)=4-x^2$ 3) $E(x)=x^2-3x+4$

4) $H(x)=\frac{x^2+1}{1-x^2}$

Corrigé :1) $B(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{3}$

$B(x)=0$ Equivaut à : $-\frac{1}{2}x-\frac{7}{3}=0$ Equivaut à : $x=-\frac{14}{3}$ on a : $a=-\frac{1}{2}<0$

Le tableau du signe est :

x	$-\infty$		$-\frac{14}{3}$		$+\infty$
$B(x)$		$+$	0	$-$	

- Si : $x\in\left]-\frac{14}{3},+\infty\right[$ alors : $B(x)<0$
- Si : $x\in\left]-\infty,-\frac{14}{3}\right[$ alors : $B(x)>0$
- Si : $x=-\frac{14}{3}$ alors : $B(x)=0$

2) $D(x)=4-x^2$

$D(x)=0$ Equivaut à : $4-x^2=0$ Equivaut à : $x^2=4$ Equivaut à : $x=\sqrt{4}=2$ ou $x=-\sqrt{4}=-2$

On a : $a=-1<0$ donc d'après la règle du signe du trinôme :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$D(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- Si : $x\in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$ alors : $D(x)<0$
- Si : $x\in]-2,2[$ alors : $D(x)>0$
- Si : $x=-2$ *ou* $x=2$ alors : $D(x)=0$

3) $E(x)=x^2-3x+4$: Le discriminant de : x^2-3x+4 est : $\Delta=(-3)^2-4\times1\times4=-7<0$ et ses racines sont Donc : $E(x)$ est un trinôme du second degré n'admettant pas de racine réelle,

On a : $a=1>0$ donc d'après la règle du signe du trinôme :

x	$-\infty$	$+\infty$
x^2-3x+4	$+$	

Donc : pour tout x réel, $E(x)$ est strictement positif. ($E(x)>0$)

4) $H(x)=\frac{x^2+1}{1-x^2}$

- On va déterminer le domaine de définition de $H(x)$:

$H(x)$ Est définie si et seulement si $1-x^2\neq0$ qui signifie que : $x\neq-1$ *et* $x\neq1$

Donc : le domaine de définition de H est : $D_H=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

- $x^2+1=0$ Équivaut à : $x^2=-1$ impossible : $x^2+1>0$

Le numérateur est positif pour tout x, et le dénominateur est un trinôme du second degré de racines −1 et 1, on peut donc dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2+1		$+$		$+$		$+$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	

- Si : $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ alors : $H(x)<0$
- Si : $x \in]-1,1[$ alors : $H(x)>0$

H N'est pas définie si $x=-1$ et $x=1$

Exercice19: (**) Résoudre les inéquations suivantes :

1) $3x^2+6x-9>0$ 2) $x^2+3x-5<-x+2$ 3) $\frac{2x+6}{x^2-4x-96}<0$

Solution : 1) $3x^2+6x-9>0$

- On commence par résoudre l'équation $3x^2+6x-9=0$.

Le discriminant de $3x^2+6x-9$ est : $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-9) = 36 + 108 = 144$.

Les solutions de l'équation $3x^2+6x-9=0$ sont : $x_1=\frac{-6-\sqrt{144}}{2\times3}=\frac{-6-12}{6}=-3$ et $x_2=\frac{-6+\sqrt{144}}{2\times3}=\frac{-6+12}{6}=1$

- On dresse ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$3x^2+6x-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$3x^2+6x-9$ Est strictement positif sur les intervalles $]-\infty;-3[$ et $]1;+\infty[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x^2+6x-9>0$ est donc $S=]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$.

b) On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.

Etudier le Signe d'un trinôme :

2) $x^2+3x-5<-x+2$ équivaut à $x^2+4x-7<0$

Le discriminant de x^2+4x-7 est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$ et ses racines sont :

Et $x_2=\frac{-4+\sqrt{44}}{2\times1}=-2+\sqrt{11}$ $x_1=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
x^2+4x-7		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+3x-5<-x+2$ est donc $S=]-2-\sqrt{11};-2+\sqrt{11}[$.

3) $\frac{2x+6}{-x^2+4x+96}<0$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :

Cette inéquation est définie si et seulement si $-x^2+4x+96\neq0$

On commence par déterminer les racines du trinôme $-x^2+4x+96$:

Le discriminant de $-x^2+4x+96$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 96 \mathrm{x} (-1) = 400$ et ses racines sont :

$x_1=\frac{-4+\sqrt{400}}{2\times(-1)}=\frac{-4+20}{-2}=\frac{16}{-2}=-8$ et $x_2=\frac{-4-\sqrt{400}}{2\times(-1)}=\frac{-4-20}{-2\times1}=\frac{-24}{-2}=12$

Donc le tableau des signes est :

x	$-\infty$		-8		-3		12		$+\infty$
$2x+6$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2+4x+96$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2x+6}{-x^2+4x+96}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S=]-8;-3]\cup]12;+\infty[$.

Exercice20 : Soit : $F(x)=6x^3+25x^2+21x-10$

1) Déterminer une racine évidente de $F(x)$

2) Déterminer alors la factorisation de $F(x)$ en un produit de monômes du premier degré.

3) Etudier le signe de : $F(x)=6x^3+25x^2+21x-10$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $F(x)>0$

Corrigé :1)

1) $F(x)=6x^3+25x^2+21x-10$

On remarque que $F(-2)=0$ donc -2 est une racine évidente de $F(x)$.

2) -2 est une racine évidente de $F(x)$.Ainsi, il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que $F(x)=(x-(-2))Q(x)$ et on peut donc écrire qu'il

Existe trois réels a, b et c tels que $F(x)=(x+2)(ax^2+bx+c)$.

Or, $(x+2)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b+2a)x^2+(c+2b)x+2c$.

Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

On trouve : $\begin{cases} a=6 \\ b+2a=25 \\ c+2b=21 \\ 2c=-10 \end{cases}$ Equivaut à : $\begin{cases} a=6 \\ b=13 \\ c=-5 \end{cases}$

$F(x)=(x+2)(6x^2+13x-5)$.

Le discriminant de : $6x^2+13x-5$ est : $\Delta=13^2-4\times6\times(-5)=289=17^2$ et ses racines sont :

$$x_1=\frac{-13-\sqrt{289}}{2\times6}=\frac{-13-17}{12}=-\frac{5}{2} \text{ et } x_2=\frac{-13+\sqrt{289}}{2\times6}=\frac{-13+17}{12}=\frac{1}{3}$$

$$6x^2+13x-5=6\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)=2\times3\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)=(3x-1)(2x+5)$$

Donc : $F(x)=(x+2)(3x-1)(2x+5)$

3) $F(x)=(x+2)(3x-1)(2x+5)$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $3x-1=0$ qui signifie que : $x=\frac{1}{3}$ et $2x+5=0$ qui signifie que : $x=-\frac{5}{2}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$3x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$F(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

4) $F(x)>0$ Équivaut à : $x \in \left]-\frac{5}{2},-2\right[\cup \left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

Ainsi, l'ensemble solution de $F(x)>0$ est : $S=\left]-\frac{5}{2},-2\right[\cup \left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

Exercice21 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $x^4-7x^2+12=0$

2) Déterminer une factorisation de x^4-7x^2+12 en un produit de monômes du premier degré.

3)En déduire une résolution de l'inéquation : $x^4-7x^2+12\geq 0$

Corrigé :1) Méthode : C'est une équation bicarrée, c'est à dire que l'inconnue est à la puissance 4, 2 et 0.
Je pose donc $X=x^2$ et je me ramène à une équation du second degré dont l'inconnue est X.
Je ne dois pas oublier à la fin de donner les solutions de l´équation de départ.

$x^4-7x^2+12=0$ Équivaut à : $\left(x^2\right)^2-7x^2+12=0$

Je pose : $X=x^2$ l'équation devienne : $X^2-7X+12=0$

Le discriminant de : $X^2-7X+12=0$ est : $\Delta=(-7)^2-4\times1\times12=49-48=1>0$ et ses solutions sont :

$X_1=\frac{7-\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{6}{2}=3$ et $X_2=\frac{7+\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{8}{2}=4$

C'est-à-dire : $x^2=3$ ou $x^2=4$

C'est-à-dire : $x=\pm\sqrt{3}$ ou $x=\mp 2$

Donc l´équation $x^4-7x^2+12=0$ admet pour ensemble de solutions :

$S=\left\{-2;-\sqrt{3};\sqrt{3};2\right\}$

2) Résolution de l'inéquation : $x^4-7x^2+12\geq 0$

On a une factorisation de x^4-7x^2+12 en un produit de monômes du premier degré :

$x^4-7x^2+12=1(x+2)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)(x-2)$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $x+\sqrt{3}=0$ signifie que : $x=-\sqrt{3}$

$x-\sqrt{3}=0$ Signifie que : $x=\sqrt{3}$ et $x-2=0$ Équivaut à : $x=2$

On peut donc dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$I(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^4-7x^2+12\geq 0$ Équivaut à : $x\in\left]-\infty,-2\right]\cup\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]\cup\left[2;+\infty\right[$

Ainsi, l'ensemble solution est : $S=\left]-\infty,-2\right]\cup\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]\cup\left[2;+\infty\right[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien