Correction Série N°2 : Les polynômes

Exercice1 : (*) Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes

Calculer $P(x)+Q(x)$ et $P(x)\times Q(x)$ Dans chacun des cas suivants et comparer :

$\deg(P\times Q)$ et $\deg(P)+\deg(Q)$

1) $P(x)=2x^3+5x-3$; $Q(x)=-3x^2+x-2$

2) $P(x)=x^5-2x^2+3$; $Q(x)=-x^5+1$

Solution: 1) On a $P(x)=2x^3-3$; $Q(x)=-3x^2+x-2$

$P(x)+Q(x)=2x^3+5x-3-3x^2+x-2=-2x^3-3x^2+6x-5$

$P(x)\times Q(x)=(2x^3+5x-3)(-3x^2+x-2)=-6x^5+2x^4-4x^3-15x^3+5x^2-10x+9x^2-3x+6$

$$P(x)\times Q(x)=-6x^5+2x^4-19x^3+14x^2-3x+6$$

$\deg(P\times Q)=5$ $\deg(P)=3$; $\deg(Q)=2$

Donc : $\deg(P\times Q)=\deg(P)+\deg(Q)$

2) $P(x)=x^5-2x^2+3$; $Q(x)=-x^5+1$

$P(x)+Q(x)=x^5-2x^2+3-x^5+1=-2x^2+4$

$P(x)\times Q(x)=(x^5-2x^2+3)(-x^5+1)=-x^{10}+x^5+2x^7-2x^2-3x^5+3$

$\deg(P\times Q)=10$ $\deg(P)=5$; $\deg(Q)=5$

Donc : $\deg(P\times Q)=\deg(P)+\deg(Q)$

Exercice2 : (**) Discuter suivant le paramètre m le degré du polynôme $P(x)$:

$P(x)=(m^2-4)x^3+(2m-4)x^2+5x-1$

Solution : $P(x)=(m^2-4)x^3+(2m-4)x$

$m^2-4=0$ Signifie que : $(m-2)(m+2)=0$

Signifie que : $m-2=0$ ou $m+2=0$

Signifie que : $m=2$ ou $m=-2$

- Si $m\neq 2$ et $m\neq -2$ alors : $m^2-4\neq 0$ et par suite : $d^\circ P=3$
- Si $m=2$ alors : le polynôme devient : $P(x)=0x^3+0x=0$ c'est un polynôme nul

Et par suite : le polynôme n'a pas de degré

- Si $m=-2$ alors : le polynôme devient : $P(x)=0x^3-8x=-8x$ et par suite : $d^\circ P=1$

Exercice3 : (**) 1) Montrer que les polynômes suivants sont égaux :

$P(x)=2x^3+3x^2-29x+30$ et $Q(x)=(x+5)(1+2x^2-7x+5)$

2) Déterminer les nombres réels : a ; b et c pour que les polynômes suivants soient égaux :

$P(x)=ax^2+bx+c$ et $Q(x)=(3x-1)(x+2)$

Solution :1) Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

Il faut développer et réduire le polynôme : $Q(x)=(x+5)(1+2x^2-7x+5)$

$Q(x)=(x+5)\left(1+2x^2-7x+5\right)=(x+5)\left(2x^2-7x+6\right)=2x^3-7x^2+6x+10x^2-35x+30$

$=2x^3-7x^2+10x^2+6x-35x+30=2x^3+3x^2-29x+30=P(x)$

Donc : $P(x)=Q(x)$

2) Déterminons les nombres réels : a ; b et c pour que : $P(x)=Q(x)$

Il faut développer et réduire le polynôme : $Q(x)=(3x-1)(x+2)$

$Q(x)=(3x-1)(x+2)=3x^2+6x-x-2=3x^2+5x-2$

Légalité : $P(x)=Q(x)$ donne système suivant en comparant deux à deux les termes de mêmes degrés : $\begin{cases} a=3 \\ b=5 \\ c=-2 \end{cases}$

Exercice4 : (**) Soit le polynôme : $P(x)=x^4+6x^3+15x^2+18x+9$

1) Calculer a et b sachant que : $P(x)=\left(x^2+3x\right)^2+a\left(x^2+3x\right)+b$

2) Factoriser $P(x)$.

Solution : Nous avons : $\left(x^2+3x\right)^2=x^4+6x^3+9x^2$

Donc : $P(x)=x^4+6x^3+9x^2+ax^2+3ax+b$

Donc : $P(x)=x^4+6x^3+(9+a)x^2+3ax+b$

Cette égalité donne on comparant deux à deux les termes de mêmes degrés le système suivant :

$\begin{cases} 9+a=15 \\ 3a=18 \\ b=9 \end{cases}$ Donc $\begin{cases} a=6 \\ b=9 \end{cases}$

Donc : $P(x)=\left(x^2+3x\right)^2+6\left(x^2+3x\right)+9$

Equivalent à : $P(x)=\left(x^2+3x\right)^2+2\times\left(x^2+3x\right)\times 3+3^2$

Par suite : $P(x)=\left(x^2+3x+3\right)^2$

Exercice5 : (***) 1) Déterminer un polynôme P de degré 3 tel que : $P(x+1)-P(x)=x$

2) En déduire la somme suivante : $S_1=1+2+3+....+n$

3) Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que : $P(x+1)-P(x)=x^2$

4) En déduire la somme suivante : $S_2=1^2+2^2+3^2+....+n^2$

Solution : P de degré 2 donc P s'écrit sous la forme : $P(x)=ax^2+bx+c$ avec : $a\neq 0$

$P(x+1)-P(x)=x$ Signifie $\left(a(x+1)^2+b(x+1)+c\right)-\left(ax^2+bx+c\right)=x$

Signifie : $ax^2+2ax+a+bx+b+c-ax^2-bx-c=x$

Signifie : $(2a-1)x+a+b=0$

Donc : $\begin{cases} 2a-1=0 \\ a+b=0 \end{cases}$ Donc : donc : $a=\frac{1}{2}$ et par suite : $b=-\frac{1}{2}$

Donc : $P(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+c$ avec : $c\in\mathbb{R}$

2) $S_1 = 1+2+3+....+n = ????$
On remplace successivement x par : 0 ;1 ;2 ;… ; n-1 ; n
Dans : $P(x+1)-P(x)=x$ On obtient :

$P(0+1)-P(0)=0 \quad (1)$

$P(1+1)-P(1)=1 \quad (2)$

$P(2+1)-P(2)=2 \quad (3)$

…….

$P((n-1)+1)-P(n-1)=n-1 \quad (n-1)$

$P(n+1)-P(n)=n \quad (n)$

On fait la somme membre à membre les égalités : $(1)+(2)+(3)+\ldots(n-1)+(n)$

On obtient : $P(n+1)-P(0)=1+2+3+...n=S_1$

Donc : $S_1 = P(n+1)-P(0)=\frac{1}{2}(n+1)^2-\frac{1}{2}(n+1)+c-\left(\frac{1}{2}0^2-\frac{1}{2}(n+1)+c\right)$

$S_1=\frac{1}{2}(n+1)^2-\frac{1}{2}(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+1-1)=\frac{1}{2}n(n+1)$ 3)P de degré 3

Donc P s'écrit sous la forme : $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ avec : $a\neq 0$

$P(x+1)-P(x)=x$ Signifie $\left(a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d\right)-\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)=x^2$

après les calculs on trouve : $a=\frac{1}{3}$ et $b=-\frac{1}{2}$ et $c=\frac{1}{6}$

Et par suite : $P(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+d$ avec : $d\in\mathbb{R}$

De la même façon on montre que : $P(n+1)-P(0)=1^2+2^2+3^2+...n^2=S_2$

Et on trouve : $S_2=P(n+1)-P(0)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice6 : (***) Trouver le diviseur du polynôme $P(x)=5x^3+x^2+2$ Sachant que le quotient et le reste sont respectivement : $Q(x)=5x^2-19x+76$ et $R(x)=-299$

Solution : Soit $D(x)$ le diviseur de $P(x)$

Alors : $P(x)=D(x)\times Q(x)+R(x)$ donc : $P(x)-R(x)=D(x)\times Q(x)$.

D'où : $D(x)=\frac{P(x)-R(x)}{Q(x)}=\frac{5x^3+x^2+304}{5x^2-19x+76}=x+4$

En utilisant la division euclidienne du polynôme $5x^3+x^2+304$ par $5x^2-19x+76$
On trouve : $D(x)=x+4$

Exercice7 : (**) Soit le polynôme : $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

1) Calculer $P(-3)$ et que peut-on dire ?

2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x)=(x+3)\times Q(x)$

Solution : 1) en remplaçons x par -3 dans le polynôme $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

On a : $P(-3)=(-3)^3+3(-3)^2-2(-3)-6=-27+27+6-6=0$

Donc -3 est racine du polynôme $P(x)$

2) Donc : $P(x)$ est divisible par $x+3$

Donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x)=(x+3)\times Q(x)$ et puisque le degré de $P(x)$ est 3

Donc : le degré de $Q(x)$ est 2 par suite : $Q(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

<u>Methode1</u> :

$P(x)=(x+3)\times(ax^2+bx+c)$

Donc : $x^3+3x^2-2x-6=(x+3)\times Q(x)=ax^3+(b+3a)x^2+(c+3b)x+3c$

Donc : $a=1$ et $b+3a=3$ $et\,3c=-6$

Donc : $a=1$ et $b=0$ $et\,c=-2$

Donc : $Q(x)=x^2+0\times x-2=x^2-2$:

<u>Methode2 :</u> $P(x)=x^3+3x^2-2x-6=(x^3+3x^2)-2(x+3)$

$P(x)=x^2(x+3)-2(x+3)=(x+3)(x^2-2)$

Donc : $Q(x)=x^2-2$

<u>Methode3 :</u> Effectuer la division euclidienne de $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$ par : $x+3$ et déterminer le quotient et le reste.

On a donc :

$$\begin{array}{rl|l} & x^3+3x^2-2x-6 & x+3 \\ \cline{3-3} - & x^3+3x^2 & x^2\quad -2 \\ \cline{2-2} - & -2x-6 & \\ & -2x-6 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

$P(x)=(x+3)Q(x)+P(-3)=(x+3)(x^2-2)+0=(x+3)(x^2-2)$

$Q(x)=x^2-2$ est le quotient et $P(-3)=0$ le reste

Exercice8 : (**) Soit le polynôme :

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

1) Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ part $x+2$ et déterminer le quotient $Q(x)$ et le reste

2) Montrer que $Q(x)$ est divisible par $x-3$

3) En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$ en polynômes de 1ere degrés

Solution :1) la division euclidienne de $P(x)$ par $x+2$

Donne : $Q(x)=x^2-4x+3$ et le reste est : 0

$$\begin{array}{rl|l} & x^3-2x^2-5x+6 & x+2 \\ \cline{3-3} & x^3-2x^2 & x^2-4x+3 \\ \cline{2-2} & -4x^2-5x+6 & \\ & 4x^2+8x & \\ \cline{2-2} + & 3x+6 & \\ & -3x-6 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

2) $Q(3)=0$ donc 3 est racine du polynôme $Q(x)$

Donc $Q(x)$ est divisible par $x-3$

3) On a : $P(x)=(x+2)(x^2-4x+3)$

En Effectuant la division euclidienne de $Q(x)$ par $x-3$

On aura $Q(x)=(x-3)(x-1)$:

Donc : $P(x)=(x+2)(x-3)(x-1)$

Exercice9 : (***) Soit le polynôme suivant (E) : $P(x)=x^3-\sqrt{3}x^2-4x+4\sqrt{3}$

1) Montrer que -2 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que : $P(x)=(x+2)\left(x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+2\sqrt{3}\right)$

3) On pose : $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+2\sqrt{3}$ et soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta=\left(\sqrt{3}-2\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $Q(x)=0$

4) En déduire les solutions de l'équation : $x-\left(\sqrt{3}+2\right)\sqrt{x}+2\sqrt{3}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\geq 0$

Solution : 1) $P(-2)=(-2)^3-\sqrt{3}(-2)^2-4(-2)+4\sqrt{3}$

$P(-2)=-8-4\sqrt{3}+8+4\sqrt{3}=0$ Donc : **-2** est racine du polynôme $P(x)$

2) $(x+2)\left(x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+2\sqrt{3}\right)=x^3-\left(\sqrt{3}+2\right)x^2+2\sqrt{3}x+2x^2-2\left(\sqrt{3}+2\right)x+4\sqrt{3}$

$=x^3-\sqrt{3}x^2-2x^2+2\sqrt{3}x+2x^2-2\sqrt{3}x-4x+4\sqrt{3}$

$=x^3-\sqrt{3}x^2-4x+4\sqrt{3}=P(x)$

3) On pose : $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+2\sqrt{3}$ $a=1$ et $b=-\left(\sqrt{3}+2\right)$ et $c=2\sqrt{3}$

$\Delta=b^2-4ac=\left(-\left(\sqrt{3}+2\right)\right)^2-4\times 2\sqrt{3}\times 1=\left(\sqrt{3}+2\right)^2-8\sqrt{3}$

$\Delta=\sqrt{3}^2+2\times 2\times\sqrt{3}+2^2-8\sqrt{3}=\sqrt{3}^2-4\sqrt{3}+2^2=\left(\sqrt{3}-2\right)^2$

b) $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+2\sqrt{3}$

Puisque : $\Delta\succ 0$ donc il y'a deux racines :

$x_1=\dfrac{\sqrt{3}+2+\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}}{2\times 1}=\dfrac{\sqrt{3}+2+\left|\sqrt{3}-2\right|}{2\times 1}$ et $x_2=\dfrac{\sqrt{3}+2-\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}}{2\times 1}=\dfrac{\sqrt{3}-2-\left|\sqrt{3}-2\right|}{2\times 1}$

Or on a: $2\succ\sqrt{3}$ car $(2)^2\succ\left(\sqrt{3}\right)^2$ donc : $\sqrt{3}-2\prec 0$

Par suite: $\left|\sqrt{3}-2\right|=-\left(\sqrt{3}-2\right)=2-\sqrt{3}$

Donc: $x_1=\dfrac{\sqrt{3}+2+2-\sqrt{3}}{2\times 1}=2$ et $x_2=\dfrac{\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-2}{2\times 1}=\sqrt{3}$ par suite: $S=\left\{\sqrt{3},2\right\}$.

4) $x-\left(\sqrt{3}+2\right)\sqrt{x}+2\sqrt{3}=0$ est équivalente à: $\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{3}+2\right)\sqrt{x}+2\sqrt{3}=0$.

On pose : $X=\sqrt{x}$ et on a donc : $X^2-\left(\sqrt{3}+2\right)X+2\sqrt{3}=0$

Mais d'après 3)b) on a : $X_1=\sqrt{3}$ et $X_2=2$

Qui Signifie que: $\sqrt{x_1}=\sqrt{3}$ et $\sqrt{x_2}=2$ donc : $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$ et $\left(\sqrt{x_2}\right)^2=(2)^2$

Qui Signifie que: $x_1=3$ et $x_2=4$ par suite: $S=\{3,4\}$

5) On a: $P(x)=(x+2)\left(x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+2\sqrt{3}\right)$

$P(x)=0$ Signifie $x+2=0$ ou $x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+2\sqrt{3}=0$

Signifie que : $x_0 = -2$ ou $x_1 = \sqrt{3}$ ou $x_2 = 2$ Par suite: $S = \left\{-2, 2, \sqrt{3}\right\}$

6) $P(x) \geq 0$ Signifie que: $(x+2)\left(x^2 - \left(\sqrt{3}+2\right)x + 2\sqrt{3}\right) \geq 0$

x	$-\infty$	-2		$\sqrt{3}$		2	$+\infty$
$Q(x)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$S = \left[-2; \sqrt{3}\right] \cup [2; +\infty[$

Exercice10 : (**) Soit le polynôme : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$

1)Quels sont les diviseurs entiers relatifs du terme constant 6 ?

2) Déterminer (en cas d'existence) les racines relatives du polynôme $P(x)$

3) Factoriser le polynôme $P(x)$ en un produit de monômes

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \geq 0$

Solution :1) les diviseurs entiers relatifs du terme constant 6 sont : -6 ; -3 ; -2 ; -1 ;1 ;2 ;3 ;6

2) S'il existe une racine $a \in \mathbb{Z}$ du polynôme $P(x)$ alors : $P(a) = 0$

C'est-à-dire : $2a^3 - a^2 - 13a - 6 = 0$

C'est-à-dire : $a\left(2a^2 - a - 13\right) = 6$

C'est-à-dire : a est un diviseur de 6

C'est-à-dire : $a \in \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$

Maintenant il ne nous reste plus qu'à tester chacun de ces nombres s'il est racine :

On trouve seulement : $\begin{cases} P(-2) = 2(-2)^3 - (-2)^2 - 13(-2) - 6 = 0 \\ P(3) = 2 \times 3^3 - 3^2 - 13 \times 3 - 6 = 0 \end{cases}$

Donc : les racines relatives du polynôme $P(x)$ sont : -2 et 3

3) Factorisons le polynôme $P(x)$ en un produit de monômes

On a :-2 est racine du polynôme $P(x)$ donc $P(x)$ est divisible par $x+2$

Il existe donc un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x+2)Q(x)$

Mais aussi on a : 3 est racine du polynôme $P(x)$ c'est-à-dire : $P(3) = (3+2)Q(3) = 0$

C'est-à-dire : $Q(3) = 0$

C'est-à-dire : 3 est racine du polynôme $Q(x)$

C'est-à-dire : $Q(x)$ est divisible par $x-3$

C'est-à-dire : Il existe un polynôme $R(x)$ tel que : $Q(x) = (x-3)R(x)$

Donc : $P(x) = (x+2)(x-3)R(x)$

C'est-à-dire : $P(x)$ est divisible par $(x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$

Donc : $P(x) = \left(x^2 - x - 6\right)R(x)$

Mais le $\deg P = 3$ et $\deg\left(x^2 - x - 6\right) = 2$ par suite : $\deg R = 1$

Donc : $R(x) = ax + b$

$P(x) = \left(x^2 - x - 6\right)(ax+b) = ax^3 + bx^2 - ax^2 - bx - 6ax - 6b$

$P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 - (b+6a)x - 6b$ et puisque : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$

Par identification on a : $\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -1 \\ -6b = -6 \\ -(b+6a) = -13 \end{cases}$ signifie que $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

Donc : $\boxed{P(x) = (x+2)(x-3)(2x+1)}$

4) $P(x) \geq 0$ Signifie: $(x+2)(x-3)(2x+1) \geq 0$

Donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		3		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S = \left[-2;\frac{1}{2}\right] \cup [3;+\infty[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien