Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°2 :

Système d'équations du premier degré a deux inconnues

Exercice1 : (*) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes :

1) $3x+y-2=0$ 2) $2x-y+1=2y-2x+5$ 3) $x+5=y+5$ 4) $x+y=2x-1$

Solution : 1) On a $3x+y-2=0$ équivalent à : $y=-3x+2$ Donc : $S=\{(x;-3x+2)/x\in\mathbb{R}\}$

2) On a $2x-y+1=2y-2x+5$ équivalent à : $4x-3y-4=0$

Équivalent à : $4x=3y+4$ équivalent à : $x=\frac{3}{4}y+1$ Donc : $S=\left\{\left(\frac{3}{4}y+1;y\right)/y\in\mathbb{R}\right\}$

3) On a $x+5=y+5$ équivalent à : $y=x$ Donc : $S=\{(x;x)/x\in\mathbb{R}\}$

4) On a $x+y=2x-1$ équivalent à : $-x+y+1=0$ ssi $y=x-1$

Donc : $S=\{(x;x-1)/x\in\mathbb{R}\}$

Exercice2 : (*) Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{R}^2$:

1) $\begin{cases}x+2y=3\\2x+3y=4\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x+3y=7\\3x-2y=4\end{cases}$ 3) $\begin{cases}3x-y=5\\2x+4y=-6\end{cases}$

Solution :

1) $\begin{cases}x+2y=3\\2x+3y=4\end{cases}$ Par exemple : Par la *Méthode de substitution :*

Dans le système $\begin{cases}x+2y=3\\2x+3y=4\end{cases}$, On exprime *x* en fonction de *y* dans la première équation et on obtient le système équivalent : $\begin{cases}x=3-2y\\2x+3y=4\end{cases}$. On remplace ensuite *x* par $3-2y$ dans la seconde équation, ce qui donne le système :

$\begin{cases}x=3-2y\\2(3-2y)+3y=4\end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases}x=3-2y\\-y+6=4\end{cases}$ soit encore à $\begin{cases}x=3-2y\\y=2\end{cases}$

Et on remplace y par 2 dans la première équation on trouve $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$

On obtient ainsi le couple solution donc : $S=\{(-1,2)\}$

2) $\begin{cases}2x+3y=7\\3x-2y=4\end{cases}$ On multiplie les termes de la première équation par 2 et ceux de la seconde par 3 et on obtient le système équivalent : $\begin{cases}4x+6y=14\\9x-6y=12\end{cases}$.

On additionne membre à membre les deux équations et on remplace la seconde équation du système par le résultat ; on obtient le système $\begin{cases}4x+6y=14\\13x=26\end{cases}$ équivalent : $\begin{cases}8+6y=14\\x=2\end{cases}$, soit $\begin{cases}6y=6\\x=2\end{cases}$

encore ou $\begin{cases}y=1\\x=2\end{cases}$. On en déduit le couple solution : $S=\{(2,1)\}$.

3) $\begin{cases}3x-y=5\\2x+4y=-6\end{cases}$ Le déterminant est : $\Delta=\begin{vmatrix}3 & -1\\2 & 4\end{vmatrix}=3\times4-(-1)\times2=14\neq0$

Alors le système (I) admet un couple solution unique

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}5 & -1\\-6 & 4\end{vmatrix}}{14}=\frac{5\times4-(-6)\times(-1)}{14}=\frac{20-6}{14}=\frac{14}{14}=1$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 5\\2 & -6\end{vmatrix}}{14}=\frac{3\times(-6)-5\times2}{14}=\frac{-18-10}{14}=\frac{-28}{14}=-2$$

On en déduit le couple solution : $S=\{(1,-2)\}$.

Exercice3 : (*) Résoudre les systèmes suivants en respectant la méthode demandée :

1) $\begin{cases}4x+2y=4\\25x+5y=-5\end{cases}$ par la méthode des combinaisons linéaires.

2) $\begin{cases}3x-4y=1\\x-2y=-1\end{cases}$ par la méthode de substitution.

3) $\begin{cases}4x-2y=8\\-18x+3y=0\end{cases}$ par la méthode de la double substitution.

Solution :1) $\begin{cases}4x+2y=4\\25x+5y=-5\end{cases}$ $\begin{cases}2x+y=2\\5x+y=-1\end{cases}$ $\begin{cases}2x+y=2\\3x=-3\end{cases}$ $\begin{cases}y=2-2\times(-1)=4\\x=-1\end{cases}$. On trouve : $S=\{(-1;4)\}$.

2) $\begin{cases}3x-4y=1\\x-2y=-1\end{cases}$ $\begin{cases}3(2y-1)-4y=1\\x=2y-1\end{cases}$ $\begin{cases}2y=4\\x=2y-1\end{cases}$ $\begin{cases}y=2\\x=3\end{cases}$. On trouve : $S=\{(3;2)\}$.

3) $\begin{cases}4x-2y=8\\-18x+3y=0\end{cases}$ $\begin{cases}y=2x-4\\y=6x\end{cases}$ $\begin{cases}6x=2x-4\\y=6x\end{cases}$ $\begin{cases}4x=-4\\y=6x\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1\\y=6\times(-1)=-6\end{cases}$. On trouve : $S=\{(-1;-6)\}$.

Exercice4 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases}(\sqrt{5}-\sqrt{3})x+(\sqrt{2}-1)y=0\\(\sqrt{2}+1)x+(\sqrt{5}+\sqrt{3})y=1\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=11\\x^2-y^2=44\end{cases}$

Solution :1) $\begin{cases}(\sqrt{5}-\sqrt{3})x+(\sqrt{2}-1)y=0\\(\sqrt{2}+1)x+(\sqrt{5}+\sqrt{3})y=1\end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\sqrt{5}-\sqrt{3} & \sqrt{2}-1\\\sqrt{2}+1 & \sqrt{5}+\sqrt{3}\end{vmatrix}=(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})-(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$$

$$\Delta=\left((\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2\right)-\left((\sqrt{2})^2-(1)^2\right)$$

Donc : $\Delta=(5-3)-(2-1)=1\neq0$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & \sqrt{2}-1\\ 1 & \sqrt{5}+\sqrt{3}\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-\left(\sqrt{2}-1\right)}{1}=-\sqrt{2}+1=1-\sqrt{2} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}\sqrt{5}-\sqrt{3} & 0\\ \sqrt{2}+1 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{1}=-\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{3}-\sqrt{5}$$

Donc **:** $S=\left\{\left(1-\sqrt{2},\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\right\}$

2) $\begin{cases}x+y=11\\ x^2-y^2=44\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=11\\ (x+y)(x-y)=44\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y=11\\ 11(x-y)=44\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=11\\ x-y=4\end{cases}$

On fait la somme membre a membre on trouve : $x+y+x-y=11+4$ c'est-à-dire : $2x=15$

Donc : $x=\frac{15}{2}$ et par suite : $\frac{15}{2}+y=11$

Donc : $y=\frac{7}{2}$ Alors on a : $S=\left\{\left(\frac{15}{2},\frac{7}{2}\right)\right\}$

Exercice5 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ et graphiquement le système suivant : $\begin{cases}4x-y=2\\ 2x-y=-2\end{cases}\ (I)$

Solution : Cette méthode consiste à relier chaque équation à une droite, puis on représente chacune des droites dans un même repère orthonormé. La solution, si elle existe, est donnée par les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

 Pour chaque équation on exprime y en fonction de x, et on obtient :

$\begin{cases}-y=-4x+2\\ -y=-2x-2\end{cases}$ C'est-à-dire : $\begin{cases}y=4x-2\\ y=2x+2\end{cases}$

Dans un repère on trace les deux droites (D_1) d'équation : $y=4x-2$,

et (D_2) d'équation : $y=2x+2$

Pour : (D_1) d'équation : $y=4x-2$ pour tracer (D_1) on va chercher deux points :

Si : $x=0$ alors : $y=4\times0-2=-2$ donc : $A(0;-2)\in(D_1)$

Si : $x=1$ alors : $y=4\times1-2=4-2=2$ donc : $B(1;2)\in(D_1)$

Et on peut tracer : $(D_1)=(AB)$

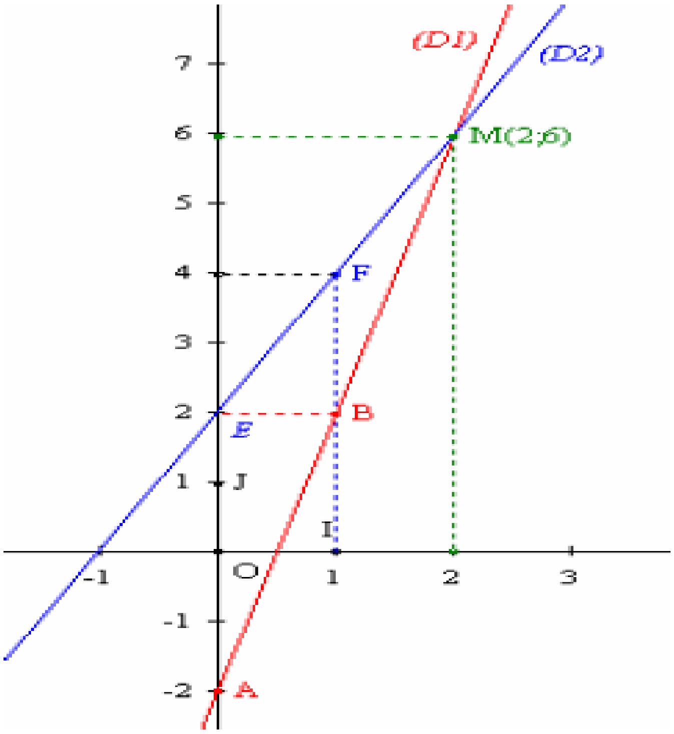
Pour : (D_2) d'équation : $y=2x+2$ pour tracer (D_2) on va chercher deux points :

Si : $x=0$ alors : $y=2\times0+2=2$ donc : $E(0;2)\in(D_1)$

Si : $x=1$ alors : $y=2\times1+2=2+2=4$ donc : $F(1;4)\in(D_2)$

Et on peut tracer : $(D_2)=(EF)$

Dans un repère orthonormé, on trace les deux droites (D_1) et (D_2)



Les deux droites (D_1) et (D_2) se coupent en un point : $M(2;6)$

 Alors le couple $(2;6)$ est la solution de ce système.

Remarque : Si les deux droites ont le même coefficient directeur, alors le système n'a pas de solution.

Si les deux droites ont le même coefficient directeur et le même ordonné à l'origine, alors le système a plusieurs solutions.

Exercice6 : (**) Un cirque propose deux tarifs d'entrée : un pour les adultes et un pour les enfants.
Un groupe de trois enfants avec un adulte paie 290 DH.
On peut traduire ces données par l'équation à deux inconnues : 3x + y = 290
Un autre groupe de 5 enfants avec quatre adultes paie 705 DH.
1) Ecrire alors une deuxième équation et résoudre le système obtenu de deux équations à deux inconnues.
2) Donner le prix d'une entrée pour un enfant et celui d'une entrée pour un adulte.

Solution :1) Si "un groupe de trois enfants avec un adulte paie 290 DH " s'écrit 3x + y = 290,
C'est que x, représente le tarif d'entrée pour les enfants et y le tarif d'entrée pour les adultes.
"Un autre groupe de 5 enfants avec quatre adultes paie 705 DH " s'écrira
Donc : 5x + 4y = 705

Et on obtient le système suivant à résoudre pour déterminer la valeur de x et y : $\begin{cases} 3x+1y=290 \\ 5x+4y=705 \end{cases}$

Résolution du système : on résoud le système par substitution : $\begin{cases} y=290-3x \\ 5x+4(290-3x)=705 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} y=290-3x \\ 5x+1160-12x=705 \end{cases}$ Équivaut à $\begin{cases} y=290-3x \\ -7x=-455 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} x=65 \\ y=95 \end{cases}$

2) Le tarif enfant est de 65 DH et le tarif adulte est de 95 DH.

Exercice7 : (**) 21 livres sont empilés les uns sur les autres ; la hauteur de la pile atteint 81 cm.
Certains de ces livres ont une épaisseur de 5cm ; les autres une épaisseur de 3cm.
Trouver le nombre de livre de chaque sorte.

Solution : Nous désignons par « x » le nombre de livres de 5 cm d'épaisseur ; par « y » le nombre de livres de 3 cm d'épaisseur.
Le nombre total de livres est de 21.
Donc : x + y = 21
Les livres de 5 cm d'épaisseur ont, en centimètres, une épaisseur totale 5x ; les livres de 3 cm d'épaisseur ont en centimètres, une épaisseur totale 3y. La hauteur totale de la pile est de 81 cm.
Donc : 5x +3y = 81

Les nombres «x » et « y » satisfont donc au système formé par les équations : $\begin{cases} x+y=21 \\ 5x+3y=81 \end{cases}$

Réciproquement, toute solution de ce système est une solution du problème pourvu que « x » et « y » soient tous deux entiers et positifs.
Résolvons ce système : pourvu que « x » et « y » soient tous deux entiers et positifs.

Résolvons ce système : $\begin{cases} x+y=21 \\ 5x+3y=81 \end{cases}$

On multiplie la première équation par -3

Ce qui donne : $\begin{cases} -3x-3y=-63 \\ 5x+3y=81 \end{cases}$

On additionne les deux membres terme à terme :(5x + – 3x) + (3y + – 3 y) = 81 + (- 63)
Donc : 2x + 0 = 18 soit x = 9
De l'équation x + y = 21 ; 9 + y = 21 ; y = 12
Conclusion : il y a donc 9 livres de 5 cm et 12 livres de 3 cm, et 12 livres de 3 cm.
Vérification :
12 + 9 = 21 et 5cm fois 9 + 3 fois 12 = 81 cm

Exercice8 : (**)

Un musée propose un tarif pour les adultes à 70 DH et un tarif pour les enfants à 45 DH.
Lors d'une journée, ce musée a reçu la visite de 205 personnes et la recette totale a été de 12225 DH.
Déterminer le nombre d'adultes et le nombre d'enfants ayant visité le musée lors de cette journée.

Solution : * Choix des inconnues : Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants.
* Mise en système d'équation :
- 205 personnes ont visité le musée donc : $x+y=205$
- La recette a été de 12225 DH alors $70x+45y=12225$

x et y Sont solutions du système suivant : $\begin{cases} x+y=205 \\ 70x+45y=12225 \end{cases}$

* Résoudre le système : On résout le système par exemple avec la méthode de substitution.

$\begin{cases} x+y=205 \\ 70x+45y=12225 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} x=205-y \\ 70x+45y=12225 \end{cases}$

Équivalent : $\begin{cases} x=205-y \\ 70(205-y)+45y=12225 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} x=205-y \\ 14350-70y+45y=12225 \end{cases}$

Équivalent : $\begin{cases} x=205-y \\ -70y+45y=12225-14350 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} x=205-y \\ -25y=-2125 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} x=205-y \\ y=\dfrac{-2125}{-25} \end{cases}$

Équivalent : $\begin{cases} x=205-y \\ y=85 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} x=205-85 \\ y=85 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} x=120 \\ y=85 \end{cases}$

* Vérification : On a : $\begin{cases} 120+85=205 \\ 70\times120+45\times85=12225 \end{cases}$

* Conclusion : Alors le nombre d'adultes est 120, et le nombre d'enfants est 85

Exercice9 : (**) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 2x+5y=24 \end{cases}$

2) En déduire les solutions du système suivant : $\begin{cases} 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=2 \\ 2\sqrt{x}+5\sqrt{y}=24 \end{cases}$

Solution :1) le déterminant du système est : $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=15+2=17\neq0$

Donc : $x=\frac{\Delta_X}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 24 & 5 \end{vmatrix}}{17}=\frac{34}{17}=2$ et $y=\frac{\Delta_Y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 24 \end{vmatrix}}{17}=\frac{68}{17}=4$. Par suite : $S=\{(2,4)\}$

2) $\begin{cases} 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=2 \\ 2\sqrt{x}+5\sqrt{y}=24 \end{cases}$ on pose : $\begin{cases} X=\sqrt{x} \\ Y=\sqrt{y} \end{cases}$ Donc on a: $\begin{cases} 3X-Y=2 \\ 2X+5Y=24 \end{cases}$

Mais on a Déjà résolu Ce système Donc: $X=2$ et $Y=4$

Donc : $\sqrt{x}=2$ et $\sqrt{y}=4$

Donc : $\left(\sqrt{x}\right)^2=2^2$ et $\left(\sqrt{y}\right)^2=4^2$ c'est-à-dire : $x=4$ et $y=16$

Donc : $S=\{(4,16)\}$

Exercice10 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x^2-3y^2=-67 \\ 4x^2-y^2=11 \end{cases}$

Solution : Pour résoudre le système on va poser : $\begin{cases} X=x^2 \\ Y=y^2 \end{cases}$ On obtient alors le système suivant :

$\begin{cases} 2X-3Y=-67 \\ 4X-Y=11 \end{cases}$ Qui Signifie que : $\begin{cases} 2X-3Y=-67 \\ Y=4X-11 \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} 2X-3(4X-11)=-67 \\ Y=4X-11 \end{cases}$

Signifie que : $\begin{cases} 2X-12X+33=-67 \\ Y=4X-11 \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} -10X=-100 \\ Y=4X-11 \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} X=10 \\ Y=4X-11 \end{cases}$

Signifie que : $\begin{cases} X=10 \\ Y=40-11 \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} X=10 \\ Y=29 \end{cases}$

Donc : $X=10$ et $Y=29$ et puisque on a noté : $\begin{cases} X=x^2 \\ Y=y^2 \end{cases}$

Donc : $x^2=10$ et $y^2=29$

Donc : ($x=\sqrt{10}$ ou $x=-\sqrt{10}$) et ($y=\sqrt{29}$ ou $y=-\sqrt{29}$)

Donc : ($x=\sqrt{10}$ et $y=\sqrt{29}$) ou ($x=-\sqrt{10}$ et $y=\sqrt{29}$) ou ($x=\sqrt{10}$ et $y=-\sqrt{29}$) ou ($x=-\sqrt{10}$ et $y=-\sqrt{29}$)

Par suite : $S=\left\{\left(\sqrt{10},\sqrt{29}\right);\left(-\sqrt{10},\sqrt{29}\right);\left(\sqrt{10},-\sqrt{29}\right);\left(-\sqrt{10},-\sqrt{29}\right)\right\}$

Exercice11 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=5 \\ -\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=2 \end{cases}$

Solution : Soient : $x \neq 0$ et $y \neq 0$

Pour résoudre le système on va poser : $\begin{cases} X = \dfrac{1}{x} \\ Y = \dfrac{1}{y} \end{cases}$ On obtient alors le système suivant : $\begin{cases} 3X + 2Y = 5 \\ -2X + Y = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 3X + 2Y = 5 \ (L_1) \\ -2X + Y = 2 \ (L_2) \end{cases}$ Qui Signifie que : $\begin{cases} 3X + 2Y = 5 \ (L_1) \\ 7Y = 16 \ \ (3L_2 + 2L_1) \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} 3X + 2Y = 5 \\ Y = \dfrac{16}{7} \end{cases}$

Signifie que : $\begin{cases} 3X + \dfrac{32}{7} = 5 \\ Y = \dfrac{16}{7} \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} X = \dfrac{1}{7} \\ Y = \dfrac{16}{7} \end{cases}$

Donc : $X = \dfrac{1}{7}$ et $X = \dfrac{7}{16}$ et puisque on a noté : $\begin{cases} X = \dfrac{1}{x} \\ Y = \dfrac{1}{y} \end{cases}$

Donc : $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{7}$ et $\dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{16}$

Donc : $x = 7$ et $y = \dfrac{7}{16}$

Par suite : $S = \left\{ \left(7, \dfrac{7}{16} \right) \right\}$

Exercice12 : (***) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation suivante : $|2x+1| = 1$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$

3)Déduire des questions précédents les solutions du système : $\begin{cases} 3|2x+1| + y^2 = 5 \\ 2|2x+1| - 3y^2 = -4 \end{cases}$

Solution :1) $|2x+1| = 1$ équivalent : $2x+1=1$ ou $2x+1=-1$

Équivalent : $2x = 0$ ou $2x = -2$

Équivalent : $x = 0$ ou $x = -1$

Donc : $S = \{-1; 0\}$

2) Par la méthode combinaison linéaire :

Le but de cette méthode est de multiplier les équations par des nombres judicieusement choisis pour qu'en additionnant ou soustrayant les équations on n'ait plus qu'une seule inconnue.

On va chercher, par exemple, à "éliminer" l'inconnue x. Pour cela on va :

multiplier la première équation par 2 qui est le coefficient de l'inconnue de la seconde équation.

Multiplier la seconde équation par 3 qui est le coefficient de l'inconnue de la première équation.

On obtient alors le système : $\begin{cases} 6x + 2y = 10 \\ 6x - 9y = -12 \end{cases}$

On va maintenant soustraire nos deux équations pour ainsi ne plus avoir de termes en x.

$$\begin{array}{rrrrl} & 6x & + & 2y & = 10 \\ -(& 6x & - & 9y & = -12) \\ \hline & & & 11y & = 22 \\ & & \text{donc} & y & = 2 \end{array}$$

On remplace maintenant cette valeur dans l'une des deux équations :
Si on choisit la première équation $3x+2=5$ soit $3x=3$ et donc $x=1$.
La solution du système est donc : $S=\{(1,2)\}$

3)Déduction des questions précédents des solutions du système : $\begin{cases} 3|2x+1|+y^2=5 \\ 2|2x+1|-3y^2=-4 \end{cases}$

On pose : $\begin{cases} X=|2x+1| \\ Y=y^2 \end{cases}$ Donc on a: $\begin{cases} 3X+Y=5 \\ 2X-3Y=-4 \end{cases}$

Des questions précédentes on déduit que : $X=1$ et $Y=2$
Donc : $|2x+1|=1$ et $y^2=2$
Donc : ($x=0$ ou $x=-1$) et ($y=-\sqrt{2}$ ou $y=\sqrt{2}$)
Par suite : $S=\{(0,\sqrt{2});(0,-\sqrt{2});(-1,-\sqrt{2});(-1,-\sqrt{2})\}$

Exercice13 : (***) On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $(I)\begin{cases} (m+2)x+y=m+1 \\ 9x+(m+2)y=6 \end{cases}$

On va utiliser la Méthode des déterminants pour Résoudre ce système

On pose : $\Delta=\begin{vmatrix} m+2 & 1 \\ 9 & m+2 \end{vmatrix}$ et $\Delta_x=\begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 6 & m+2 \end{vmatrix}$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix} m+2 & m+1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$

1)a) Vérifier que : le déterminant du système est : $\Delta=(m-1)(m+5)$

b) En déduire les valeurs de m pour lesquelles : $\Delta=0$

2) Vérifier que : $\Delta_x=(m-1)(m+4)$ et $\Delta_y=-3(m-1)$

3) On suppose que : $m\neq 1$ et $m\neq -5$

a) Montrer que le système (I) admet un couple unique comme solution.

b) Résoudre le système (I) avec simplification des résultats.

c) En déduire la résolution du système : $(2)\begin{cases} -x+y=-2 \\ 9x-y=6 \end{cases}$

4) On suppose que : $m=1$

a) Ecrie le système dans ce cas, on le note (3).

b) Quel est le nombre de solution du système (3).

c) Résoudre le système (3)

5) On suppose que : $m=-5$

a) Ecrie le système dans ce cas, on le note (4).

b) Quel est le nombre de solution du système (4).

c) Résoudre le système (4)

Solution :1) a) On calcule le déterminant du système (I)

$$\Delta=\begin{vmatrix} m+2 & 1 \\ 9 & m+2 \end{vmatrix}=(m+2)\times(m+2)-9\times 1=(m+2)^2-3^2=(m+2-3)(m+2+3)=(m-1)(m+5)$$

b) $\Delta=0$ Signifie que : $(m-1)(m+5)=0$ Signifie que : $m-1=0$ ou $m+5=0$

$\Delta=0$ Signifie que : $m=1$ ou $m=-5$

2) Vérifions que : $\Delta_x=(m-1)(m+4)$ et $\Delta_y=-3(m-1)$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 6 & m+2 \end{vmatrix}=(2+m)(1+m)-6=m^2+2m+m+2-6=m^2+3m-4$: a = 1, b = 3 ; c = -4

Le discriminent est : $b^2-4ac=3^2+16=25>0$

Donc : $m_1=\frac{-3-\sqrt{25}}{2a}=\frac{-3-5}{2\times1}=\frac{-8}{2}=-4$ et $m_2=\frac{-3+\sqrt{25}}{2a}=\frac{-3+5}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$

Donc : $\Delta_x=m^2+3m-4=1(m-(-4))(m-1)=(m+4)(m-1)$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} m+2 & m+1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}=6(2+m)-9(1+m)=12+6m-9m-9=3-3m=-3(m-1)$

3) On suppose que : $m\neq1$ et $m\neq-5$

Dans ce *cas* : $\Delta\neq0$

Alors le système (I) admet un couple solution unique :

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{(m-1)(m+4)}{(m-1)(m+5)}=\frac{m+4}{m+5}$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-3(m-1)}{(m-1)(m+5)}=-\frac{3}{m+5}$$

Donc : $S=\left\{\left(\frac{m+4}{m+5};-\frac{3}{m+5}\right)\right\}$

c) Déduction de la résolution du système : $(2)\begin{cases}-x+y=-2\\9x-y=6\end{cases}$

On pose : $m=-3$ dans : $(I)\begin{cases}(m+2)x+y=m+1\\9x+(m+2)y=6\end{cases}$ on obtient : $(2)\begin{cases}-x+y=-2\\9x-y=6\end{cases}$

Et puisque: $-3\neq1$ et $-3\neq-5$

Donc : $S=\left\{\left(\frac{-3+4}{-3+5};-\frac{3}{-3+5}\right)\right\}$ c'est-à-dire : $S=\left\{\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)\right\}$

4) On suppose que : $m=1$

a) Ecriture du système dans ce cas, on le note (3) :

Si $m=1$ alors $\Delta=0$

On remplace m par 1 dans $\begin{cases}(m+2)x+y=m+1\\9x+(m+2)y=6\end{cases}$: on trouve : $(3)\begin{cases}3x+y=2\\9x+3y=6\end{cases}$

Qui est équivalent à : $(3)\begin{cases}3x+y=2\\3x+y=2\end{cases}$

Qui est équivalent à (3): $3x+y=2$

b) Dans ce cas résoudre le système c'est résoudre l'équation (3): $3x+y=2$

Ce système a une infinité de solutions

c) $3x+y=2$ est équivalent a : $y=2-3x$

Alors on a : $S=\{(x;2-3x)/x\in\mathbb{R}\}$

5) On suppose que : $m=-5$

a) Si $m=-5$ alors $\Delta=0$

On remplace m par -5 dans $\begin{cases}(m+2)x+y=m+1\\9x+(m+2)y=6\end{cases}$ on trouve : $\begin{cases}-3x+y=-4\\9x-3y=6\end{cases}$

Qui est équivalent à : $\begin{cases}3x-y=4\\3x-y=2\end{cases}$

b) (3) $\begin{cases}3x-y=4\\3x-y=2\end{cases}$ impossible

Ce système n'a pas de solutions

c) $S=\varnothing$

Exercice14 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}x-2y=1\\3x+y=2\ (I)\\x-y=3\end{cases}$

Solution : On considère le système suivant : $\begin{cases}x-2y=1\\x-y=3\end{cases}(I')$ On a pour (I') :

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2\\1 & -1\end{vmatrix}=-1+2=1\neq 0$$

Donc : $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & -2\\3 & -1\end{vmatrix}}{1}=\dfrac{5}{1}=5$ et $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix}4 & -2\\1 & -11\end{vmatrix}}{-14}=\dfrac{-42}{-14}=3$

Donc : $(-2,3)$ est une solution du système : (I') $\begin{cases}x-2y=1\\x-y=3\end{cases}$

Mais on remplaçant dans l'équation $3x+y=2$ on a : $3\times5+2=17\neq 2$

Donc : $(-2,3)$ ne vérifie pas l'équation $3x+y=2$ Par suite : $S=\varnothing$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien