Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°2 : TRIGONOMÉTRIE1

Exercice1 : (*) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 120°.

Solution :1) $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$ signifie que : $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{120}{180}$

$\alpha=120\times\frac{\pi}{180}=\frac{12\pi}{18}=\frac{2\pi}{3}$ rad.

Exercice2 : (*) Calculer la longueur L de l'arc AB d'un cercle (C) de rayon $R=3cm$ et tel que : $\alpha=\left(\overline{AOB}\right)=\frac{\pi}{6}rad$

Solution : On a : $L=R\times\alpha=3\times\frac{\pi}{6}cm=\frac{\pi}{2}cm$

Exercice3 : (*):1) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des abscisses suivantes :

7π , $\frac{110\pi}{3}$, $\frac{19\pi}{4}$, $-\frac{131\pi}{3}$, $-\frac{217\pi}{6}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points : $A(0)$; $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$;$D\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

$H\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $F\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$; $N\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Solution :

- $x=7\pi$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$ c a d $\alpha=7\pi+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

C'est-à-dire : $-\pi<7\pi+2k\pi\le\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivalent à : $\pi-7\pi<2k\pi\le\pi-7\pi$

Équivalent à : $-8<2k\le-6$

Équivalent à : $-4<k\le-3$ et $k\in\mathbb{Z}$

Alors $k=-3$ et donc $\alpha=7\pi+2(-3)\pi=7\pi-6\pi=\pi$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a $x=7\pi$ est $\alpha=\pi$

- $x=\frac{110\pi}{3}$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$ c'est-à-dire : $\alpha=\frac{110\pi}{3}+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

C'est-à-dire : $-\pi<\frac{110\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$ équivalent à : $-\pi-\frac{110\pi}{3}<2k\pi\le\pi-\frac{110\pi}{3}$

Équivalent à : $-\frac{113\pi}{3}<2k\pi\le-\frac{107\pi}{3}$

Équivalent à : $-\frac{113}{6}<k\le-\frac{107}{6}$ et $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-18.83<k\le-17.83$et $k\in\mathbb{Z}$

Alors $k=-18$ et donc $\alpha=\frac{110\pi}{3}+2k\pi=\frac{110\pi}{3}+2(-18)\pi=\frac{110\pi-108\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x=\frac{110\pi}{3}$ est $\alpha=\frac{2\pi}{3}$

- $x=\frac{19\pi}{4}$

On a $\frac{19\pi}{4}=\frac{16\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=4\pi+\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2\times 2\pi$ et $\frac{3\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ donc l'abscisse curviligne principale associée a $\frac{19\pi}{4}$ est $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

- $x=-\frac{131\pi}{3}$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$ c a d $\alpha=-\frac{131\pi}{3}+2k\pi$ et $\alpha\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

C'est-à-dire : $-\pi<-\frac{131\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-\pi+\frac{131\pi}{3}<2k\pi\leq\pi+\frac{131\pi}{3}$

Équivalent à : $\frac{128\pi}{3}<2k\pi\leq\frac{134\pi}{3}$

Équivalent à : $\frac{128}{6}<k\leq\frac{134}{6}$ et $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $21.33<k\leq 22.33$ et $k\in\mathbb{Z}$

Alors $k=22$ et donc $\alpha=-\frac{131\pi}{3}+2k\pi=-\frac{131\pi}{3}+2(22)\pi=\frac{-131\pi+132\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée à $x=-\frac{131\pi}{3}$ est $\alpha=\frac{\pi}{3}$

- $x=-\frac{217\pi}{6}$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$ c a d $\alpha=-\frac{217\pi}{6}+2k\pi$ et $\alpha\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

C'est-à-dire : $-\pi<-\frac{217\pi}{6}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\pi+\frac{217\pi}{6}<2k\pi\leq\pi+\frac{217\pi}{6}$ Équivalent à : $\frac{211\pi}{6}<2k\pi\leq\frac{223\pi}{6}$

Équivalent à : $\frac{211}{12}<k\leq\frac{223}{12}$ et $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $17.58<k\leq 18.58$ et $k\in\mathbb{Z}$

Alors $k=18$ et donc : $\alpha=-\frac{217\pi}{6}+2k\pi=-\frac{217\pi}{6}+2(18)\pi=\frac{-217\pi+216\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a $x=-\frac{217\pi}{6}$ est $\alpha=-\frac{\pi}{6}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points : $A(0)$; $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $D\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

$H\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $F\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; $M\left(\frac{7\pi}{2}\right)$; $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$; $N\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$-\frac{\pi}{2}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ et $\frac{7\pi}{2}=\frac{8\pi-\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=4\pi-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+2\times 2\pi$ On a $x=\frac{7\pi}{2}$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a $x=\frac{7\pi}{2}$ est $\alpha=-\frac{\pi}{2}$

- $x = \frac{2007\pi}{4}$

Methode1 : On divise 2007 par 4 on trouve $501,75$ on prend le nombre entier proche ex : 502

Donc : $\frac{2007\pi}{4} - 502\pi = \frac{2007\pi}{4} - \frac{2008\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$

$\frac{2007\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 502\pi = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 251\pi$ et $-\frac{\pi}{4} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x = \frac{2007\pi}{4}$ est $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

Methode2 : Soit α l'abscisse curviligne principale associée à : $x = \frac{2007\pi}{4}$

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c a d $\alpha = \frac{2007\pi}{4} + 2k\pi$ et $\alpha \in \left]-\pi\,;\pi\right]$

C'est-à-dire : $-\pi < \frac{2007\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

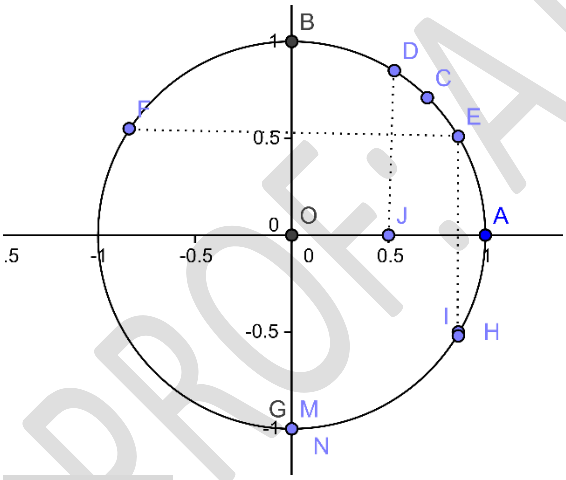
Équivalent à : $-1 < \frac{2007}{4} + 2k \leq 1$

Équivalent à : $-1 - \frac{2007}{4} < 2k \leq 1 - \frac{2007}{4}$ et $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-\frac{2011}{8} < k \leq \frac{2003}{8}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-251,3 \simeq -\frac{2011}{8} < k \leq -\frac{2003}{8} \simeq -250,3$

Donc $k = -251$ par suite : $\alpha = \frac{2007\pi}{4} + 2(-251)\pi = -\frac{\pi}{4}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x = \frac{2007\pi}{4}$ est $\alpha = -\frac{\pi}{4}$



Exercice4 : (*) Parmi les mesures suivantes, indiquer celles qui sont associés au même point que $M\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ Sur le cercle trigonométrique : $\frac{47\pi}{12}$; $\frac{-49\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{-241\pi}{12}$; $\frac{-37\pi}{12}$; $-\frac{313\pi}{12}$

Solution : $\frac{47\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{48\pi}{12} = 4\pi$ ce qui correspond à un écart de deux tours.

$\frac{-49\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{48\pi}{12} = -4\pi$: ce qui correspond à un écart de deux tours.

$\frac{11\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{12\pi}{12} = \pi$: ce qui correspond à un demi-tour.

$\frac{-241\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{240\pi}{12}=-20\pi$:ce qui correspond à un écart de 10 tours.

$\frac{-37\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{36\pi}{12}=-3\pi$: ce qui correspond à un tour et demi.

$-\frac{313\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{312\pi}{12}=-26\pi$: ce qui correspond à un écart de 13 tours.

Finalement $\frac{47\pi}{12}$; $\frac{-49\pi}{12}$; $\frac{-241\pi}{12}$; $-\frac{313\pi}{12}$ sont associés au même point que M

Exercice5 : (**) Placer sur un cercle trigonométrique d'origine I

Les points d'abscisses curvilignes : $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Solution :1) Pour placer facilement ces points M_k sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principales de ces points $M_k\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)$

$\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ Équivalent à : $-\pi<\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\leq\pi$

Équivalent à : $-1<\frac{1}{6}+\frac{k}{3}\leq 1$

Équivalent à : $-1-\frac{1}{6}<\frac{k}{3}\leq 1-\frac{1}{6}$

Équivalent à : $-\frac{7}{6}<\frac{k}{3}\leq\frac{5}{6}$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{2}<k\leq\frac{5}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Par suite : $k=-3$ ou $k=-2$ ou $k=-1$ ou $k=0$ ou $k=1$ ou $k=2$

Donc : le nombre de points est 6 :

Si $k=0$ alors : $A\left(\frac{\pi}{6}+\frac{0\times\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$

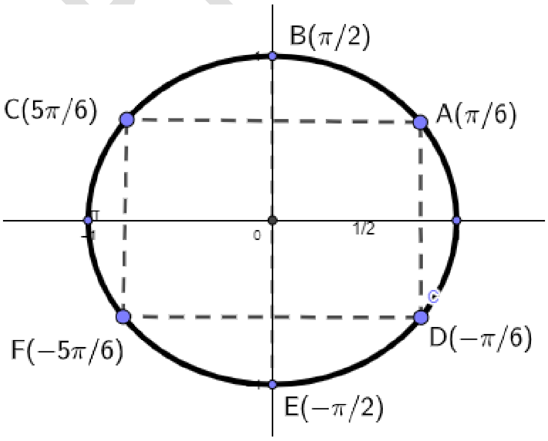
Si $k=1$ alors : $B\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1\times\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Si $k=2$ alors : $C\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\times\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $C\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Si $k=-1$ alors : $D\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $D\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Si $k=-2$ alors : $E\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\times\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $E\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Si $k=-3$ alors : $F\left(\frac{\pi}{6}-\frac{3\times\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $F\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$



Exercice6 : (**) Soit sur un cercle trigonométrique d'origine I les points A ; B; C d'abscisses curvilignes respectifs : $\frac{17\pi}{4}$; $\frac{23\pi}{3}$; $-\frac{23\pi}{6}$

1) Placer sur le cercle trigonométrique ces points
2) En déduire les mesures des angles orientés :

$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)$; $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right)$; $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$

Solution :1) Pour placer facilement ces points sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principale de ces points.

$A\left(\frac{17\pi}{4}\right)$: $\frac{17\pi}{4}=\frac{16\pi+\pi}{4}=\frac{16\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=4\pi+\frac{\pi}{4}$

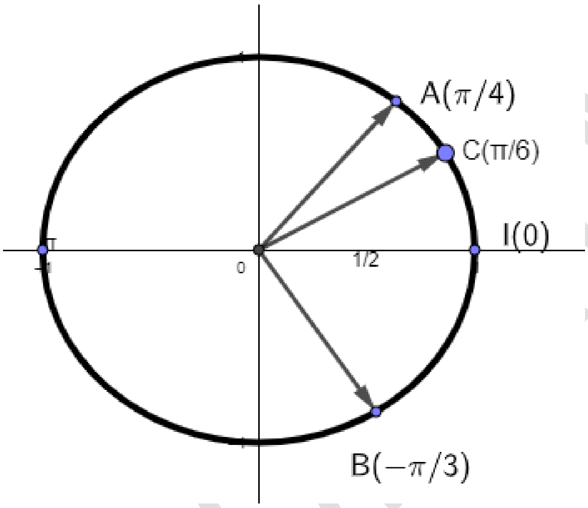
On a : $\frac{\pi}{4}\in\left]-\pi;\pi\right]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point A

$B\left(\frac{23\pi}{3}\right)$: $\frac{23\pi}{3}=\frac{24\pi-\pi}{3}=\frac{24\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=8\pi-\frac{\pi}{3}$

On a : $-\frac{\pi}{3}\in\left]-\pi;\pi\right]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point B

$C\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$: $-\frac{23\pi}{6}=\frac{-24\pi+\pi}{6}=-\frac{24\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=-4\pi+\frac{\pi}{6}$

On a : $\frac{\pi}{6}\in\left]-\pi;\pi\right]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point C.



2)Remarque : $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right)\equiv x_M\left[2\pi\right]$ avec $M\left(x_M\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv x_B-x_A\left[2\pi\right]$ avec $A\left(x_A\right)$ et $B\left(x_B\right)$

$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{4}\left[2\pi\right]$ et $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$

On a : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OI}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)\left[2\pi\right]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)\left[2\pi\right]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$ c'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\frac{7\pi}{12}\left[2\pi\right]$

$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\left[2\pi\right]$

On a : $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OI}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right)\left[2\pi\right]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)\equiv-\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}[2\pi]$ c'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Exercice7 : (**): $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs tel que : $\left(\vec{u};\vec{v}\right)\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Déterminer la mesure principale des angles suivants : $\left(2\vec{u};\vec{v}\right)$; $\left(-\vec{v};2\vec{u}\right)$; $\left(3\vec{v};-2\vec{u}\right)$;

Solution : $\left(2\vec{u};\vec{v}\right)\equiv\left(\vec{u};\vec{v}\right)[2\pi]$

$$\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

$$\left(-\vec{v};2\vec{u}\right)\equiv\left(-\vec{v};\vec{v}\right)+\left(\vec{v};2\vec{u}\right)[2\pi]$$

$$\equiv\pi+\left(\vec{v};\vec{u}\right)[2\pi]$$

$$\equiv\pi-\left(\vec{u};\vec{v}\right)[2\pi]$$

$$\equiv\pi+\frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

$$\equiv\frac{7\pi}{4}[2\pi]\equiv2\pi-\frac{\pi}{4}[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$\left(3\vec{v};-2\vec{u}\right)\equiv\left(\vec{v};-\vec{u}\right)[2\pi]$$

$$\equiv-\left(-\vec{u};\vec{v}\right)[2\pi]$$

$$\equiv\left(\pi+\left(\vec{u};\vec{v}\right)\right)[2\pi]$$

$$\equiv-\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)[2\pi]$$

$$\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Exercice8 : (**) Calculer les rapports trigonométriques des nombre réel suivants :

-8π , $\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{35\pi}{4}$

Solution : Remarques :

$\cos(-8\pi)=\cos(0+(-8\pi))=\cos(0+2\times(-4)\pi)=\cos(0)=1$ Car : $\cos x=\cos(x+2k\pi)$

$\sin(-8\pi)=\sin(0+(-8\pi))=\sin(0+2\times(-4)\pi)=\sin(0)=0$ Car : $\sin x=\sin(x+2k\pi)$ et $\tan(x+k\pi)=\tan x$

$\tan(-8\pi)=\tan(0+(-8\pi))=\tan(0)=0$ Car : $\tan(x+k\pi)=\tan x$

✓ On a : $\frac{5\pi}{4}=\frac{4\pi+\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{4}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Car : $\cos(\pi+x)=-\cos x$

$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Car : $Sin(\pi+x)=-\sin x$

$\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ Car : $\tan(\pi+x)=\tan x$

✓ On a : $\frac{4\pi}{3}=\frac{3\pi+\pi}{3}=\frac{3\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$

$\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ Car : $\cos(\pi+x)=-\cos x$

$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Car : $Sin(\pi+x)=-\sin x$

$\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ Car : $\tan(\pi+x)=\tan x$

$\cos\left(-\frac{35\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{35\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{36\pi-\pi}{4}\right)=\cos\left(9\pi-\frac{\pi}{4}\right)$ $\cos\left(-\frac{35\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi+8\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{35\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{36\pi-\pi}{4}\right)=-\sin\left(9\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right)=-\sin\left(\pi+8\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice9 : (**) Calculer : $A=\cos\left(\frac{29\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{18\pi}{4}\right)$ et $B=\tan\left(\frac{21\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)$

$C=\sin\left(\frac{28\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{17\pi}{2}\right)$; $D=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

Solution : $A=\cos\left(\frac{29\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{18\pi}{4}\right)=\cos\left(7\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$A=\cos\left(6\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{2}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{2}$ donc : $A=-\cos\frac{\pi}{4}+0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$B=\tan\left(\frac{21\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\tan\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{3}=1+\sqrt{3}$

$C=\sin\left(\frac{28\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)=\sin\left(9\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(8\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$C=\sin\left(8\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+1=-\sin\frac{\pi}{3}+1$ Donc : $C=-\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

$D=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$D=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$ Donc : $D=\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice10 : (**) 1) Sachant que : $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{\pi}{2}<x<\pi$; calculer : $\cos x$ et $\tan x$

Solution : On a $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ c'est à dire : $\cos^2 x=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ c'est à dire : $\cos^2 x=1-\frac{1}{3}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{2}{3}$ par suite : $\cos x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$

Par suite : $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

Or $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ donc : $\cos x<0$ donc : $\cos x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{6}}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice11 : (**) Sachant que : $-\pi < x < 0$ et $\tan x = \sqrt{3}-\sqrt{2}$
Déterminer la valeur exacte de $\cos x$ et $\sin x$

Solution :1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Donc : $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 = 1+\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$

Donc : $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 6-2\sqrt{6}$ c'est-à-dire :

$$\cos^2 x = \frac{1}{6-2\sqrt{6}} = \frac{6+2\sqrt{6}}{\left(6-2\sqrt{6}\right)\left(6+2\sqrt{6}\right)} = \frac{6+2\sqrt{6}}{6^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2} = \frac{6+2\sqrt{6}}{12} = \frac{18+6\sqrt{6}}{36}$$

Donc : $\cos x = \sqrt{\dfrac{18+6\sqrt{6}}{36}}$ ou $\cos x = -\sqrt{\dfrac{18+6\sqrt{6}}{36}}$ c'est-à-dire : $\cos x = \dfrac{\sqrt{18+6\sqrt{6}}}{6}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{18+6\sqrt{6}}}{6}$

Et puisque : $-\pi < x < 0$ et $\tan x = \sqrt{3}-\sqrt{2} \succ 0$ alors $\cos x \prec 0$ et donc : $\cos x = -\dfrac{\sqrt{18+6\sqrt{6}}}{6}$

On a aussi : $\sin x = \cos x \times \tan x$ donc : $\sin x = -\dfrac{\sqrt{18+6\sqrt{6}}}{6}\times\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

Exercice12 : (**) 1) Calculer en fonction de : $\sin x$ et $\cos x$ les expressions suivantes :

$$E(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\pi-x\right)-2\sin(x-2\pi)+5\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)$$

$$F(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-3\cos\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)-4\sin(\pi-x)$$

Solution :1) $E(x) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\pi-x\right)-2\sin(x-2\pi)+5\sin\left(x+\dfrac{5\pi}{2}\right)$

$$E(x) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)-2\sin x+5\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+2\pi\right)$$

$$E(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\sin x+5\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$E(x) = -\sin x-2\sin x+5\cos x = -3\sin x+5\cos x$$

$$F(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-3\cos\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)-4\sin(\pi-x)$$

$$F(x) = \cos x-3\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-4\sin x$$

$$F(x) = \cos x-3\sin x-4\sin x = \cos x-7\sin x$$

Exercice13 : (**) Sachant que $\tan\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

1) Montrer que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = \dfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

2) Calculer la valeur de $\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

2) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{9\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$.

Solution :1) On a : $1+\tan^2\frac{\pi}{10}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{10}}$ donc : $\cos^2\frac{\pi}{10}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{\pi}{10}}=\frac{1}{1+\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

C'est-à-dire : $\cos^2\frac{\pi}{10}=\frac{1}{\frac{5+5-2\sqrt{5}}{5}}=\frac{5}{10-2\sqrt{5}}$

$\cos^2\frac{\pi}{10}=\frac{5\left(10+2\sqrt{5}\right)}{100-20}=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$ et puisque : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\geq 0$ alors : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

2) Calcul de la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$:

On a : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\times\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\times\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(5-2\sqrt{5}\right)}{5}}$ c'est-à-dire : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

3) On a : $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{10\pi-\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{10\pi}{10}-\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{10}\right)$

$\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)=-\cos\frac{\pi}{10}$ Donc : $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)=-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

On a : $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{10}$ par suite : $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

Exercice14 : (**) Soit $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ On pose : $A(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos(2x)+\sin(2x)\right)^2-1\right]$

1) Calculer $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $A\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

2) Montrer que : $A(x)=\cos 2x\times\sin 2x$

3) Montrer que : $A(-x)=-A(x)$

4) Calculer : $A(x)+A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Solution :1) On a : $A(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos(2x)+\sin(2x)\right)^2-1\right]$

Donc : $A\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)\right)^2-1\right]$

Donc : $A\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right)^2-1\right]$

Donc : $A\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[(0+1)^2-1\right]=\frac{1}{2}\times 0=0$

$A\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\left(2\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)+\sin\left(2\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)\right)^2-1\right]$

$$A\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2-1\right]=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2-1\right]=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1\right]$$

Donc : $A\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}(0-1)=-\frac{1}{2}$

2) Montrons que : $A(x)=\cos 2x\times\sin 2x$

On a : $A(x)=\frac{1}{2}\left[(\cos(2x)+\sin(2x))^2-1\right]$

Donc : $A(x)=\frac{1}{2}\left[(\cos(2x))^2+2\cos(2x)\sin(2x)+(\sin(2x))^2-1\right]$

Donc : $A(x)=\frac{1}{2}\left[(\cos(2x))^2+(\sin(2x))^2+2\cos(2x)\sin(2x)-1\right]$ or : $(\cos X)^2+(\sin X)^2=1$

Donc : $A(x)=\frac{1}{2}\left[1+2\cos(2x)\sin(2x)-1\right]$

Donc : $A(x)=\frac{1}{2}2\cos(2x)\sin(2x)=\cos(2x)\sin(2x)$

3) Montrons que : $A(-x)=-A(x)$

On a : $A(x)=\cos(2x)\sin(2x)$

Donc : $A(-x)=\cos(-2x)\times\sin(-2x)$ or : $\cos(-X)=\cos X$ et $\sin(-X)=-\sin X$

Donc : $A(-x)=-\cos(2x)\times\sin(2x)$

Donc : $A(-x)=-A(x)$

4) Calculons : $A(x)+A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

On a : $A(x)=\cos(2x)\sin(2x)$

Donc : $A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Donc : $A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ or : $\cos\left(X+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin X$ et $\sin\left(X+\frac{\pi}{2}\right)=\cos X$

Donc : $A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin(2x)\cos(2x)$

Donc : $A(x)+A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos(2x)\sin(2x)-\sin(2x)\cos(2x)=0$

Exercice15 : (**) Simplifier les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$

$E=(2\cos x+\sin x)^2+(\cos x-2\sin x)^2$

$F=2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-3\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

$G=\sin^8 x+\cos^8 x+6\cos^4 x\sin^4 x+4\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

$H=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$

Solution : $E=(2\cos x+\sin x)^2+(\cos x-2\sin x)^2$

$E=4\cos^2 x+4\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-4\cos x\sin x+4\sin^2 x$

$E=5\cos^2 x+5\sin^2 x=5\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=5\times1=5$ $F=2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-3\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

$F=2\left(\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3\right)-3\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

$F=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\cos^4 x+\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x\right)-3\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

$F=2\cos^4 x+2\sin^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x-3\cos^4 x-3\sin^4 x$

$F=-\cos^4 x-\sin^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x$

$F=-\left(\cos^4 x+\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x\right)$

$F=-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=-1$

$G=\sin^8 x+\cos^8 x+6\cos^4 x\sin^4 x+4\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

$G=\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)^2-2\cos^4 x\sin^4 x+6\cos^4 x\sin^4 x+4\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

$G=\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)^2+4\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)+4\cos^4 x\sin^4 x$

$G=\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\left(\cos^4 x+\sin^4 x+2\cos^2 x\sin^2 x\right)+2\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)+4\cos^4 x\sin^4 x$

$G=\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\left(\cos^2 x\sin^2 x\right)^2+2\cos^2 x\sin^6 x+2\cos^6 x\sin^2 x+4\cos^4 x\sin^4 x$

$G=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^6 x\cos^2 x+2\cos^4 x\sin^4 x+2\cos^6 x\sin^2 x+2\cos^4 x\sin^4 x$

$G=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^4 x\cos^2 x+2\cos^4 x\sin^2 x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)$

$G=\sin^4 x+\cos^4 x+2\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)$

$G=\left(\sin^2 x\right)^2+\left(\cos^2 x\right)^2+2\cos^2 x\sin^2 x$

$G=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=1$

$H=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$

$H=\sqrt{\sin^4 x+4\left(1-\sin^2 x\right)}+\sqrt{\cos^4 x+4\left(1-\cos^2 x\right)}$

$H=\sqrt{\sin^4 x-4\sin^2 x+4}+\sqrt{\cos^4 x-4\cos^2 x+4}$

$H=\sqrt{\left(\sin^2 x-2\right)^2}+\sqrt{\left(\cos^2 x-2\right)^2}$

$H=\left|\sin^2 x-2\right|+\left|\cos^2 x-2\right|$ Or on a $-1\leq\sin x\leq 1$ et $-1\leq\cos x\leq 1$

Donc : $0\leq\sin^2 x\leq 1$ et $0\leq\cos^2 x\leq 1$

Donc : $\sin^2 x-2\prec 0$ et $\cos^2 x-2\prec 0$

Donc : $H=-\left(\sin^2 x-2\right)-\left(\cos^2 x-2\right)$

Donc : $H=-\sin^2 x+2-\cos^2 x+2$

Donc : $H=-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+2+2=-1+4=3$

Exercice16 : (**) ABC un triangle tel que : $BC=\sqrt{2}$ et $AC=\frac{\sqrt{2}}{3}$ et $BAC=\frac{3\pi}{4}$

1) Vérifier que : $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Calculer : $\sin ABC$ et en déduire la valeur de $\cos ABC$

Solution :1) Vérifions que $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$: On a : $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) D'après la loi des sinus dans le triangle ABC on a : $\frac{\sin ABC}{AC}=\frac{\sin BAC}{BC}$ c'est-à-dire :

$$\frac{\sin ABC}{AC}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{BC}$$

$$\sin ABC=\frac{AC\times\sin BAC}{BC}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

Et on a : $\cos^2 ABC+\sin^2 ABC=1$ donc :

$$\cos^2 ABC=1-\sin^2 ABC=1-\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2=1-\frac{2}{36}=1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}$$

Donc : $\cos ABC=\sqrt{\frac{17}{18}}$ ou $\cos ABC=-\sqrt{\frac{17}{18}}$

Mais puisque l'angle ABC est aigu

Alors : $\cos ABC=\sqrt{\frac{17}{18}}$ (Angle aigu est un angle inférieur à l'angle droit,)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien