Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°3 :

Equations et inéquations et systèmes partie3 : Equation du second degré

Exercice1 : (*) et (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2x^2 = 72$ 2) $-\frac{1}{2}x^2 = 5$ 3) $2(3x-1)^2 = 8$ 4) $7x^2 + 16x = 0$

5) $-5x^2 + 6x + 8 = 0$ (on peut utiliser l'écriture canonique). 6) $4(x^2-1) = (x-1)(x+2)$

Solution : 1) L'équation : $2x^2 = 72$

$2x^2 = 72$ Signifie que : $x^2 = \frac{72}{2}$ Signifie que : $x^2 = 36$

36 est positif donc l'équation admet deux solutions $x = \sqrt{36} = 6$ et. $x = -\sqrt{36} = -6$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \{-6;6\}$

2) L'équation : $-\frac{1}{2}x^2 = 5$

$-\frac{1}{2}x^2 = 5$ Signifie que : $x^2 = -10$ mais : -10 est négatif donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Donc : $S = \varnothing$

3) L'équation : $2(3x-1)^2 = 8$

$2(3x-1)^2 = 8$ Signifie que : $(3x-1)^2 = 4$

Signifie que : $3x-1 = \sqrt{4}$ ou $3x-1 = -\sqrt{4}$

Signifie que : $3x-1 = 2$ ou $3x-1 = -2$

Signifie que : $3x = 2+1$ ou $3x = -2+1$

Signifie que : $3x = 3$ ou $3x = -1$

Signifie que : $x = 1$ ou $x = -\frac{1}{3}$

L'équation admet deux solutions $x = 1$ et $x = -\frac{1}{3}$.

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \left\{-\frac{1}{3};1\right\}$

4) $7x^2 + 16x = 0$ Signifie que : $x(7x+16) = 0$

Signifie que : $x = 0$ ou $7x + 16 = 0$ c'est-à-dire : : $x = 0$ ou $x = -\frac{16}{7}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \left\{0;-\frac{16}{7}\right\}$

5) $-5x^2 + 6x + 8 = 0$: On va d'abord déterminer la forme canonique du trinôme

$-5x^2 + 6x + 8 = ax^2 + bx + c$

$-5x^2 + 6x + 8 = -5\left(x^2 - \frac{6}{5}x\right) + 8$ on factorise par : $a = -5$

$$=-5\left[\left(x^2-2\times x\times\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]+8$$: on remarque une identité remarquable :

$$=-5\left[\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{25}\right]+8=-5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{9}{5}+8=-5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{49}{5}$$

$-5x^2+6x+8=-5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{49}{5}$ Cette écriture s'appelle la forme canonique

$-5x^2+6x+8=0$ Signifie que : $-5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{49}{5}=0$ Signifie que : $-5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2=-\frac{49}{5}$

Signifie que : $\left(x-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{49}{25}$ Signifie que : $\left(x-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{49}{25}$

Signifie que : $x-\frac{3}{5}=\sqrt{\frac{49}{25}}$ ou $x-\frac{3}{5}=-\sqrt{\frac{49}{25}}$

Signifie que : $x-\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$ ou $x-\frac{3}{5}=-\frac{7}{5}$

Signifie que : $x=\frac{7}{5}+\frac{3}{5}$ ou $x=-\frac{7}{5}+\frac{3}{5}$

Signifie que : $x=\frac{10}{5}=2$ ou $x=-\frac{4}{5}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{-\frac{4}{5};2\right\}$

6) $4\left(x^2-1\right)=(x-1)(x+2)$ Signifie que : $4\left(x^2-1^2\right)-(x-1)(x+2)=0$

Signifie que : $4(x+1)(x-1)-(x-1)(x+2)=0$

Signifie que : $(x-1)\left[4(x+1)-(x+2)\right]=0$ Signifie que : $(x-1)(3x+2)=0$

Signifie que : $x-1=0$ ou $3x+2=0$

Signifie que : $x=1$ ou $x=-\frac{2}{3}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{-\frac{2}{3};1\right\}$

Exercice2 : (**) Déterminer la forme canonique des trinômes suivants :

1) $2x^2+12x+8$ 2) $3x^2-6x+24$

Solution :1) Pour écrire $2x^2+12x+8$ sous forme canonique on commence par factoriser le trinôme par le coefficient qui est devant x^2 : On obtient $2\left(x^2+6x+4\right)$

Puis on doit transformer : x^2+6x+4 en factorisant avec les identités remarquables :
Pour cela on utilise les deux premiers termes de x^2+6x+4 (x^2 correspond à a² et $6x$ à 2ab)
Donc : $a=x$ et $2ab=6x$ c'est-à-dire : $b=3$.

Donc : $x^2+6x+4=(x+3)^2-...+4$

Si on développe $(x+3)^2$ on obtient x^2+6x+9

Pour avoir seulement x^2+6x on doit retrancher 9.

Donc : $x^2+6x+4=(x+3)^2-3^2+4=(x+3)^2-9+4=(x+3)^2-5$

Donc : $2x^2+12x+8=2\left[(x+3)^2-5\right]$

Donc : $2x^2+12x+8=2(x+3)^2-10$

$2(x+3)^2-10$ est la forme canonique de $2x^2+12x+8$

Autre méthode : Pour déterminer la forme canonique de : $2x^2+12x+8$

Calculons le discriminant de : $2x^2+12x+8=ax^2+bx+c$: $a=2$; $b=12$; $c=8$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(12)^2-4\times 2\times(8)=144-64=80$

La forme canonique de : ax^2+bx+c en générale est :

$ax^2+bx+c=a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ Avec $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a^2}$

La forme canonique de $2x^2+12x+8$ est:

$2x^2+12x+8=2\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ $\quad\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{12}{2\times 2}=-3$ $\quad$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a^2}=-\frac{80}{4\times 2^2}=-\frac{80}{16}=-5$

Donc : $2x^2+12x+8=2\left[(x+3)^2-5\right]$: La forme canonique

2) Pour écrire $3x^2-6x+24$ sous forme canonique on commence par factoriser le trinôme par le coefficient qui est devant x^2 : On obtient $3\left(x^2-2x+8\right)$

Puis on doit transformer : x^2-2x+8 en factorisant avec les identités remarquables :
Pour cela on utilise les deux premiers termes de x^2-2x+8 (x^2 correspond à a² et $-2x$ à 2ab)
Donc : $a=x$ et $2ab=-2x$ c'est-à-dire : $b=-1$.
Donc : $x^2-2x+8=(x-1)^2-...+8$

Si on développe $(x-1)^2$ on obtient x^2-2x+1

Pour avoir seulement x^2-2x on doit retrancher 1.
Donc : $x^2-2x+8=(x-1)^2-1^2+8=(x-1)^2-1+8=(x-1)^2+7$

Donc : $3x^2-6x+24=3\left[(x-1)^2+7\right]$

Donc : $3x^2-6x+24=3(x-1)^2+21$

$3(x-1)^2+21$ est la forme canonique de $3x^2-6x+24$

Autre méthode : Pour déterminer la forme canonique de : $3x^2-6x+24$
Calculons le discriminant de: $3x^2-6x+24=ax^2+bx+c$: $a=3$; $b=-6$; $c=24$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-6)^2-4\times 3\times(24)=36-288=-252$

La forme canonique de : ax^2+bx+c en générale est :

$ax^2+bx+c=a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ Avec $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a^2}$

La forme canonique de $3x^2-6x+24$ est:

$3x^2-6x+24=3\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ $\quad\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\times 3}=1$ $\quad$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a^2}=-\frac{-252}{4\times 3^2}=+\frac{252}{36}=7$

Donc : $3x^2-6x+24=3\left[(x-1)^2+7\right]$:

La forme canonique de : $3x^2-6x+24$ est $3(x-1)^2+21$

Exercice3 : (*) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations $P(x)=0$ et factoriser le trinôme $P(x)$:

a) $P(x)=-5x^2+6x+8$ $\qquad$ b) $P(x)=2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}$

c) $P(x)=16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$ $\qquad$ d) $P(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-4$

Solution : a) $P(x)=-5x^2+6x+8$

Calculons le discriminant de l'équation $-5x^2+6x+8=0$: $a=-5$; $b=6$; $c=8$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=6^2-4\times 8\times(-5)=36+160=196=14^2>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{196}}{2\times(-5)}=\frac{-6-14}{-10}=2 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{196}}{2\times(-5)}=\frac{-6+14}{-10}=-\frac{4}{5}$$

Donc : $S=\left\{-\frac{4}{5};2\right\}$

Et le trinôme $P(x)=-5x^2+6x+8$ a une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

C'est-à-dire : $P(x)=-5(x-2)\left(x-\left(-\frac{4}{5}\right)\right)=-5(x-2)\left(x+\frac{4}{5}\right)=(x-2)(-5x-4)=(2-x)(5x+4)$

b) $P(x)=2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}=0$: $a=2$; $b=-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; $c=\sqrt{6}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=\left(-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)^2-4\times 2\times\sqrt{6}=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-8\times\sqrt{6}$

$\Delta=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-8\times\sqrt{6}=\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-8\sqrt{6}$

$\Delta=\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-8\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2$

Donc : $\Delta=\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{2\times 2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{4}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{2\times 2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{4}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$$

Donc : $S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{2}\right\}$

Et le trinôme $P(x)=2x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}$ a une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

C'est-à-dire : $P(x)=2\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)=\left(2x-\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$

c) $P(x)=16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$

Calculons le discriminant de l'équation $16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$: $a=16$; $b=-\frac{8}{3}$; $c=\frac{1}{9}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=\left(-\frac{8}{3}\right)^2-4\times 16\times\frac{1}{9}=\frac{64}{9}-\frac{64}{9}=0$

Comme $\Delta=0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-\frac{8}{3}}{2\times 16}=\frac{1}{12}$

Donc : $S=\left\{\frac{1}{12}\right\}$ et le trinôme $P(x)=16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$ a une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$

$$P(x)=16\left(x-\frac{1}{12}\right)^2=4^2\left(x-\frac{1}{12}\right)^2=\left(4\left(x-\frac{1}{12}\right)\right)^2=\left(4x-\frac{1}{3}\right)^2$$

d) $P(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-4$

Calculons le discriminant de l'équation $-\frac{1}{2}x^2+x-4=0$: $a=-\frac{1}{2}$; $b=1$; $c=-4$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=1^2-4\times(-4)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1-8=-7<0$

Comme $\Delta<0$, l'équation ne possède pas de solution réelle c'est-à-dire : $S=\varnothing$

Et le trinôme $P(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-4$ ne peut pas être factorisée

Exercice4 : (*) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2x^2-4x+6=0$ 2) $x^2-4x-21=0$

3) $3x^2-6x+3=0$ 4) $3x-15\sqrt{x}+18=0$

Solution : 1) $2x^2-4x+6=0$: $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times6=16-48=-32<0$

Comme $\Delta<0$, l'équation ne possède pas de solution réelle c'est-à-dire : $S=\varnothing$

2) $x^2-4x-21=0$: $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-21)=16+84=100=(10)^2>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{100}}{2\times1}$ et $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{100}}{2\times1}$

$x_1=\frac{4+10}{2}=\frac{14}{2}=7$ et $x_2=\frac{4-10}{2}=\frac{-6}{2}=-3$ Donc : $S=\{-3,7\}$

3) $3x^2-6x+3=0$ $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times3\times3=36-36=0$

Comme $\Delta=0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x=\frac{-(-6)}{2\times3}=\frac{6}{6}=1$ c'est-à-dire : $S=\{1\}$

4) $3x-15\sqrt{x}+18=0$ avec : $x\geq0$

Faisons un changement de variable en posant : $t=\sqrt{x}$

Nous obtenons l'équation : $3t^2-15t+18=0$

$\Delta=(-15)^2-4\times3\times18=225-216=9\succ0$

Les solutions de : $3t^2-15t+18=0$ sont : $t_1=\frac{15-3}{6}=2$ et $t_2=\frac{15+3}{6}=3$ donc on a : $\sqrt{x}=2$ ou $\sqrt{x}=3$

Donc : $x=4$ ou $x=9$ Par suite : $S=\{4;9\}$

Exercice5 : (**) La somme des carrés de trois nombres entiers naturels consécutifs vaut 3470.
Quel est le premier de ces nombres ?

Solution : Appelons x le premier de ces trois nombres. x vérifie l'équation : $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=3470$

Donc : $x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=3470$

Donc : $3x^2+6x+5=3470$

Donc : $3x^2+6x-3465=0$

Calculons delta : $\Delta=5^2-4\times3\times(-3465)=36+41580=41616$

Les deux valeurs possibles pour x sont : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{41616}}{2\times3}=\frac{-6-204}{6}=\frac{-210}{6}=-35$

Et $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{41616}}{2\times3}=\frac{-6+204}{6}=\frac{198}{6}=33$

Comme x est un entier naturel x est positif le premier des trois nombres est 33.

Exercice6 : (*) Soit le trinôme $2024x^2-2025x+1$

a) Vérifier que 1 est racine du trinôme

b) Trouver l'autre racine du trinôme

Solution : a) $2024\times1^2-2025\times1+1=2024-2025+1=2025-2025=0$ donc $x_1=1$

b) a = 2024, b = -2025 et c = 1

On a : $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$ donc $1\times x_2=\frac{1}{2024}$ c'est-à-dire : $x_2=\frac{1}{2024}$

Exercice7 : (***) Soit le trinôme (E) : $P(x)=2x^2-5x+1$

1) Prouver que le trinôme (E) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha+\beta$; $\alpha\times\beta$; $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$; $\alpha^2+\beta^2$; $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha^3+\beta^3$

Solution : 1) $a=2$: **et** **et** $b=-5$ **et** $c=1$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times1=25-8=17$

Comme $\Delta>0$: le trinôme (E) a deux racines distinctes : α et β

2) On a : $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ et $\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$ donc $\alpha+\beta=\frac{-(-5)}{2}=\frac{5}{2}$ et $\alpha\times\beta=\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}=5$$

On a : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Donc $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$

Donc $\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\frac{1}{2}=\frac{25}{4}-1=\frac{21}{4}$

On a : $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\frac{21}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{21}{4}\times2=\frac{21}{2}$

On sait que : $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=\left(\frac{5}{2}\right)^3-3\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{125}{8}-\frac{15}{4}=\frac{95}{8}$

Exercice8 : (***) Sans calculer le discriminant Δ résoudre les équations suivantes :

1) $x^2-6x+8=0$ 2) $x^2-7x+12=0$ 3) $x^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{6}=0$

Solution : On sait que : les solutions de l'équation : $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\times\beta=0$ sont : $x_1=\alpha$ et $x_2=\beta$

1) $x^2-6x+8=0$ signifie que : $x^2-(4+2)x+4\times2=0$

C'est-à-dire : $x_1=2$ et $x_2=4$ Par suite : $S=\{2;4\}$

2) $x^2-7x+12=0$ signifie que : $x^2-(3+4)x+3\times4=0$ c'est-à-dire : $x_1=3$ et $x_2=4$

Par suite : $S=\{3;4\}$

3) $x^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{6}=0$ signifie que : $x^2-\left(\sqrt{3}+\left(-\sqrt{2}\right)\right)x+\sqrt{3}\times\left(-\sqrt{2}\right)=0$

C'est-à-dire : $x_1=\sqrt{3}$ et $x_2=-\sqrt{2}$ par suite : $S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{3}\right\}$

Exercice9 : (***) On considère l'équation (E) : $x^2-8x+3=0$

1) On pose : $a=\sqrt{13}-1$ et $b=\sqrt{13}+3$

Vérifier que : $\frac{a}{b}=4-\sqrt{13}$ et montrer que : $\left(\frac{a}{b}\right)^2-8\left(\frac{a}{b}\right)+3=0$

2) Déduire sans calculer le discriminant Δ les solutions de l'équation (E)

3) Soient α et β les solutions de l'équation (E)

Donner une équation du second degré qui a pour solutions : $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\beta}{\alpha}$

Solution : 1) a) $b=\sqrt{13}+3$ et $a=\sqrt{13}-1$

$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{13}-1}{\sqrt{13}+3}=\frac{\left(\sqrt{13}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{\left(\sqrt{13}+3\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{13-3\sqrt{13}-\sqrt{13}+3}{13-9}=\frac{16-4\sqrt{13}}{4}=4-\sqrt{13}$$

Montrons que : $\left(\frac{a}{b}\right)^2-8\left(\frac{a}{b}\right)+3=0$

$$\left(4-\sqrt{13}\right)^2-8\left(4-\sqrt{13}\right)+3=16-8\sqrt{13}+13-32+8\sqrt{13}+3=0$$

Donc : $\frac{a}{b}$ est une solution de l'équation (E) : $x^2-8x+3=0$

2) On a : $\left(\frac{a}{b}\right)^2-8\left(\frac{a}{b}\right)+3=0$: Donc : $\frac{a}{b}=4-\sqrt{13}=x_1$ est une solution de l'équation (E) : $x^2-8x+3=0$

Soit : x_2 l'autre solution donc : $x_1+x_2=\frac{-(-8)}{1}=8$ c'est-à-dire : $x_2=8-\left(4-\sqrt{13}\right)=4+\sqrt{13}$

3) Soient α et β les solutions de l'équation (E)

Donnons une équation du second degré qui a pour solutions : $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\beta}{\alpha}$?

$$S=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\left(4-\sqrt{13}\right)^2+\left(4+\sqrt{13}\right)^2}{\left(4-\sqrt{13}\right)\left(4+\sqrt{13}\right)}=\frac{4^2-8\sqrt{13}+13+4^2+8\sqrt{13}+13}{16-13}=\frac{58}{3}$$

Et $P=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}=1$

Donc : l'équation du second degré est : $x^2-Sx+P=0$ c'est-à-dire : $x^2-\frac{58}{3}x+1=0$

Ou : l'équation du second degré est : $3x^2-58x+3=0$

Exercice 10 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} x+y=5 \\ x\times y=4 \end{cases}$

Solution : méthode1 : $\begin{cases} x+y=5 \\ x\times y=4 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x=5-y \\ (5-y)\times y=4 \end{cases}$

On considère : $(5-y)\times y=4$ ssi $-y^2+5y=4$ c'est-à-dire : $y^2-5y+4=0$

Calculons le discriminant : a = 1, b = -5 et c = 4

Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $y_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2a}=\frac{5-3}{2\times 1}=1$ et

$y_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2a}=\frac{5+3}{2\times 1}=4$

Si $y=1$ et puisque $x=5-y$ alors $x=5-1=4$

Si $y=4$ et puisque $x=5-y$ alors $x=5-4=1$

On en déduit que : $S=\{(4,1);(1,4)\}$

Méthode1 : Pour résoudre le système : $(I)\begin{cases} x+y=s \\ x\times y=p \end{cases}$ où les s , p sont des réels donnés il suffit de résoudre

L'équation : $x^2-sx+p=0$

Dans notre exercice : résoudre l'équation : $x^2-5x+4=0$

Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$.et on finit de la même façon que la méthode1

Exercice11 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1) $x^4-4x^2-21=0$ 2) $x^4-8x^2+16=0$

Solution :1) $x^4-4x^2-21=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$

Nous obtenons l'équation : $X^2-4X-21=0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 16 + 84 = 100$

Les solutions de : $X^2-4X-21=0$ sont : $X_1=\frac{-(-4)+10}{2\times 1}=\frac{-6}{2}=-3$ et $X_2=\frac{-(-4)-10}{2\times 1}=\frac{14}{2}=7$

Donc : $x^2=7$ et $x^2=-3$

Or l'équation : $x^2=-3$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

Donc : on a $x=\sqrt{7}$ ou $x=-\sqrt{7}$ par suite : $S=\{-\sqrt{7};\sqrt{7}\}$

2) $x^4-8x^2+16=0$: Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$

Nous obtenons l'équation : $X^2-8X+16=0$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 16 = 64 - 64 = 0$ la solution double de : $X^2-2X+1=0$ est : $X=\frac{-(-8)}{2\times 1}=\frac{8}{2}=4$

Donc on a : $x^2=4$ c'est-à-dire $x=2$ ou $x=-2$

Par suite : $S=\{-2;2\}$

Exercice12 : (***) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $3x|x+1|+x-2=0$ 2) $\frac{x|x^2-4|}{|x-2|}=2$ 3) $2x|x-1|-|x-2|=0$

Solution :1) $3x|x+1|+x-2=0$

Si $x\geq -1$ alors $x+1\geq 0$ donc : $|x+1|=x+1$

Donc : l'équation devient : $3x(x+1)+x-2=0$ qui Signifie que : $3x^2+4x-2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=4+2\times 3=10\succ 0$

Comme $\Delta'>0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2-\sqrt{10}}{3}$ et $x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2+\sqrt{10}}{3}$

Mais : $x_1=-1\notin[-1;+\infty[$ donc : $S_1=\left\{\frac{-2+\sqrt{10}}{3}\right\}$

Si $x\leq -1$ alors $x+1\leq 0$ donc : $|x+1|=-x-1$

Donc : l'équation devient : $-3x(x+1)+x-2=0$ qui signifie que : $-3x^2-2x-2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=1-6=-5\prec 0$

Comme $\Delta'\prec 0$, l'équation ne possède pas de solutions donc : $S_2=\varnothing$.

Par suite : $S=S_1\cup S_2=\left\{\frac{-2+\sqrt{10}}{3}\right\}$

2) $\frac{x|x^2-4|}{|x-2|}=2$: On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette l'équation est définie si et seulement si $x-2\neq 0$

$x-2=0$ Signifie : $x^2=4$ Signifie : $x=2$ donc : $D_E=\mathbb{R}-\{2\}$

b) Résolvons l'équation : étudions le signe de : $x-2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

Si $x\geq 2$ alors $x-2\geq 0$ par suite : $|x-2|=x-2$

Donc : l'équation devient : $\frac{x(x^2-4)}{(x-2)}=2$ qui signifie que: $x(x+2)=2$ c'est-à-dire : $x^2+x-2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=1+2=3\succ 0$

Comme $\Delta'>0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=-1-\sqrt{3}$ et $x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=-1+\sqrt{3}$

Tous les deux ne sont pas supérieurs à 2 donc : $S_1=\varnothing$

Si $x\prec 2$ alors $x-2\prec 0$ donc : $|x-2|=-x+2$

Donc : l'équation devient : $\frac{x(x^2-4)}{-(x-2)}=2$ qui signifie que: $x(x+2)=-2$ c'est-à-dire : $x^2+2x+2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=1-2=-1\prec 0$

Comme $\Delta'\prec 0$, l'équation ne possède pas de solutions

Donc : $S_2=\varnothing$ Par suite : $S=S_1\cup S_2=\varnothing$

3) $2x|x-1|-|x-2|=0$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x-1$	$-$	0 $-$		$+$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$		$x-1$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	0	$x-2$

D'après ce tableau on a trois possibilités

Si $x \prec 1$ alors : l'équation devient : $2x(-x+1)-(-x+2)=0$

Signifie : $-2x^2+3x-2=0$: Calculons le discriminant de l'équation : $\Delta=b^2-4ac=9-16=-7\prec 0$

Donc : $S_1=\varnothing$

Si $1\prec x\leq 2$ alors : l'équation devient : $2x(x-1)-(-x+2)=0$ qui signifie que: $2x^2-x-2=0$

Calculons le discriminant de l'équation : $\Delta=b^2-4ac=1+16=17\succ 0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{17}}{4}$

Seulement x_1 vérifie : $1\prec x\leq 2$ Donc : $S_2=\left\{\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

Si $x\succ 2$ alors l'équation devient : $2x(x-1)-(x-2)=0$ qui signifie que: $2x^2-3x+2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta=b^2-4ac=-7\prec 0$

Comme $\Delta\prec 0$, l'équation ne possède pas de solutions.

Donc : $S_3=\varnothing$ par suite : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left\{\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right\}$

Exercice13 : (***) (Equations avec des racines carrées)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sqrt{x}=x-2$

Corrigé :

Remarque : La relation $a=b\Leftrightarrow a^2=b^2$ n'est pas vraie si les deux nombres sont de signes contraires.

a) L'équation est définie si $x\geq 0$

L'équation est donc définie sur : $D_E=[0,+\infty[$

b) Je travaille par équivalence en m'assurant que les deux membres

Sont positifs avant d´élever au carré.

$\sqrt{x}=x-2$ Signifie que : $\sqrt{x}^2=(x-2)^2$ et $x\in[2,+\infty[$

Signifie que : $x=x^2-4x+4$

Signifie que : $x^2-5x+4=0$

Le discriminant de : $x^2-5x+4=0$ est : $\Delta=(-5)^2-4\times1\times4=25-16=9>0$ et ses solutions sont :

$x_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1\notin D_E$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{8}{2}=4\in D_E$

$x^2-5x+4=0$ Signifie que : $x=4\in D_E$

Par conséquent : $S=\{4\}$

Exercice14 : (***) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre $m\in\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$x^2-2(m+1)x+4=0$; (E)

Corrigé : Soit $x\in\mathbb{R}$: $x^2-2(m+1)x+4=0$

Le discriminant de : $x^2-2(m+1)x+4=0$ est : $\Delta=\left[-2(m+1)\right]^2-4\times1\times4=(2m+2)^2-16$

$\Delta=(2m+2)^2-4^2=(2m+2-4)(2m+2+4)=(2m-2)(2m+6)=4(m-1)(m+3)$

On cherche le tableau de signe de l'expression : $\Delta=4(m-1)(m+3)$

m	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$m-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$m+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(m-1)(m+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1ére cas : $m\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ on a ; $\Delta=4(m-1)(m+3)>0$:

Donc : l'Equation (E) admet deux solutions réelles distinctes x1 et x2 telles que :

$x_1=\frac{2(m+1)-\sqrt{4(m-1)(m+3)}}{2}=(m+1)-\sqrt{(m-1)(m+3)}$ et $x_2=\frac{2(m+1)+\sqrt{4(m-1)(m+3)}}{2}=(m+1)+\sqrt{(m-1)(m+3)}$

Donc : $S=\left\{(m+1)-\sqrt{(m-1)(m+3)};(m+1)+\sqrt{(m-1)(m+3)}\right\}$

2ére cas : $m\in\left]-3;1\right[$ on a $\Delta=4(m-1)(m+3)<0$:

Donc : L'équation n'admet pas de solutions

Donc : $S=\varnothing$

3ére cas : $m=1$: on a $\Delta=4(1-1)(1+3)=0$:

Donc : L'équation admet une solution unique (double): $x=\frac{-b}{2a}=\frac{2(m+1)}{2\times1}=m+1=2$

Donc : $S=\{2\}$

4ére cas : $m=-3$: on a $\Delta=4(-3-1)(-3+3)=0$:

Donc : L'équation admet une solution unique (double): $x=\frac{-b}{2a}=\frac{2(m+1)}{2\times1}=-3+1=-2$

Donc : $S=\{-2\}$

Exercice15 : (*) Résoudre les inéquations suivantes :

a) $2x^2-4x+6\geq0$ b) $4x^2-8x+3\leq0$ n c) $x^2-3x-10<0$

Solution : a) $2x^2-4x+6\geq0$ $a=2$

Calculons le discriminant : a = 2, b = -4 et c = 6 donc : $\Delta=b^2-4ac=16-48=-32<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x^2-4x+6$		$+$	

Par suite : $S=\mathbb{R}$

b) $4x^2-8x+3\leq0$: $a=4$ Étudions le signe du trinôme : $\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16>0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{8+4}{2\times4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ et $x_2=\frac{8-4}{8}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2-8x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite : $S=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

c) $x^2-3x-10<0$ $\quad\Delta=b^2-4ac=49>0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=5$ et $x_2=-2$

x	$-\infty$	-2		5	$+\infty$
$x^2-3x-10$	$+$	0	$-$	0	$+$

Par suite : $S=\left]-2,5\right[$

Exercice16 : (**) Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1) $3x^2+6x-9>0$ $\qquad$ 2) $\frac{-3x^2+x+5}{2x^2+x-5}\geq 0$

Solution : 1) $3x^2+6x-9>0$: On cherche d'abord les solutions de l'équation : $3x^2+6x-9=0$

$\Delta=6^2-4\times3\times(-9)=36+108=144$

Donc : $x_1=\frac{-6-\sqrt{144}}{2\times3}=\frac{-6-12}{6}=-3$ et $x_2=\frac{-6+\sqrt{144}}{2\times3}=\frac{-6+12}{6}=1$

Donc le tableau des Signes est :

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$3x^2+6x-9$	$+$	0	$-$	0	$+$

Par suite l'ensemble des solutions est: $S=\left]-\infty\,;-3\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$

2)Il faut étudier le signe du numérateur et du dénominateur puis regrouper les résultats dans un tableau de signes. Pour le numérateur : $\Delta=1^2-4\times(-1)\times5=1+20=21$.

Delta est positif donc l'équation du deuxième degré possède deux solutions :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{21}}{-2}=\frac{1+\sqrt{21}}{2}\simeq 2,8$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{21}}{-2}=\frac{1-\sqrt{21}}{2}\simeq -1,8$

Le coefficient devant x² est négatif donc le numérateur est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines.De même, pour le dénominateur : $\Delta=1^2-4\times(-5)\times2=1+40=41$

Donc : $x_1'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{41}}{4}\simeq -1,9$ et $x_2'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{41}}{4}\simeq 1,4$

Le coefficient devant x² est positif donc le dénominateur est négatif entre ses racines.
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{41}}{4}$		$\frac{1-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{41}}{4}$		$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$	$+\infty$
$-x^2+x+5$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$
$2x^2+x-5$	$+$	0	$+$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$\frac{-x^2+x+5}{2x^2+x-5}$	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$

Donc : $S=\left]\frac{-1-\sqrt{41}}{4};\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right]\cup\left]\frac{-1+\sqrt{41}}{4};\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right]$.

Exercice17 : (**) Quelles sont les solutions de l'inéquation : $3x^2+2x-1>2x^2+x-3$?

Solution : $3x^2+2x-1>2x^2+x-3$ signifie : $3x^2+2x-1-2x^2-x+3>0$

Signifie : $x^2+x+2>0$

Pour résoudre cette inéquation, calculons delta le discriminant : $a=1$; $b=1$; $c=2$

Donc : $\Delta = b^2 - 4\times a\times c = 1^2 - 4\times1\times2 = 1-8 = -7 < 0$

Attention ce n'est pas parce que delta est négatif que cette inéquation n'admet pas de solution.

Le coefficient devant x^2 est : $a=1$ positif donc elle est donc toujours positive.

x	$-\infty$ $+\infty$
x^2+x+2	$+$

Donc : $S=\mathbb{R}$

Exercice18 : On considère l´équation : (E) : $2x^3-13x^2+5x+6=0$

1) Montrer que le nombre 1 est solution de (E)

2) Déterminer trois réels : a, b et c tels que : $2x^3-13x^2+5x+6=(x-1)(ax^2+bx+c)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : (I) : $2x^3-13x^2+5x+6<0$

Corrigé :1) On remarque que $2\times1^3-13\times1^2+5\times1+6=2-13+5+6=13-13=0$

Donc :le nombre 1 est solution de (E)

2)Ainsi, il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que : $2x^3-13x^2+5x+6=(x-1)(ax^2+bx+c)$

Or, $(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$.

Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

On trouve : $\begin{cases} a=2 \\ b-a=-13 \\ c-b=5 \\ -c=6 \end{cases}$ Equivaut à : $\begin{cases} a=2 \\ b=-11 \\ c=-6 \end{cases}$ Donc : $2x^3-13x^2+5x+6=(x-1)(2x^2-11x-6)$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

$2x^3-13x^2+5x+6=0$ Equivaut à : $(x-1)(2x^2-11x-6)=0$ Equivaut à : $x-1=0$ ou $2x^2-11x-6=0$

Equivaut à : $x=1$ ou $2x^2-11x-6=0$

Le discriminant de : $2x^2-11x-6=0$ est : $\Delta=(-11)^2-4\times2\times(-6)=121+48=169=13^2$ et ses solutions sont :

$x_1=\frac{11-\sqrt{169}}{2\times2}=\frac{11-13}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{11+\sqrt{169}}{2\times2}=\frac{11+13}{4}=\frac{24}{4}=6$

Ainsi, l'ensemble solution de (E) est : $S=\left\{-\frac{1}{2};1;6\right\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : (I) : $2x^3-13x^2+5x+6<0$

On a : $2x^3-13x^2+5x+6=(x-1)(2x^2-11x-6)$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-1/2$		1		6		$+\infty$
$2x^2-11x-6$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$p(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble solution de (I) est : $S=\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]1,6\right[$

Exercice19 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $4x^4+4x^2-3=0$

2) Déterminer une factorisation de $4x^4+4x^2-3$.

3) En déduire une résolution de l'inéquation : $4x^4+4x^2-3\geq 0$

Corrigé :1) Méthode : C'est une équation bicarrée, c'est à dire que l'inconnue est à la puissance 4, 2 et 0. Je pose donc $X=x^2$ et je me ramène à une équation du second degré dont l'inconnue est X.
Je ne dois pas oublier à la fin de donner les solutions de l´équation de départ.

$4x^4+4x^2-3=0$ Équivaut à : $4\left(x^2\right)^2+4x^2-3=0$

Je pose : $X=x^2$ l'équation devienne : $4X^2+4X-3=0$

Le discriminant de : $4X^2+4X-3=0$ est : $\Delta=4^2-4\times4\times(-3)=16+48=64>0$ et ses solutions sont :

$X_1=\frac{-4-\sqrt{64}}{2\times4}=\frac{-12}{8}=-\frac{3}{2}$ et $X_2=\frac{-4+\sqrt{64}}{2\times4}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

C'est-à-dire : $x^2=-\frac{3}{2}$ impossible ou $x^2=\frac{1}{2}$

C'est-à-dire : $x=-\sqrt{\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc l´équation $4x^4+4x^2-3=0$ admet pour ensemble de solutions :

$S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

2) Déterminons une factorisation de $4x^4+4x^2-3$.

On a : $4X^2+4X-3=4\left(X+\frac{3}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)=(2X+3)(2X-1)$

Donc une factorisation de $4x^4+4x^2-3$ en un produit de trinômes est : $4x^4+4x^2-3=\left(2x^2+3\right)\left(2x^2-1\right)$

3) Résolution de l'inéquation : $4x^4+4x^2-3\geq 0$

On a : $4x^4+4x^2-3=\left(2x^2+3\right)\left(2x^2-1\right)$ et $2x^2+3>0$

$4x^4+4x^2-3\geq 0$ Équivaut à : $2x^2-1\geq 0$

$2x^2-1=0$ Signifie que : $x^2=\frac{1}{2}$ Signifie que : $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

On peut donc dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
$p(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$4x^4+4x^2-3\geq 0$ Équivaut à : $x\in\left]-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$

Ainsi, l'ensemble solution est : $S=\left]-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$

Exercice20 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) (I) ; $\frac{4x^2-3x-9}{x^2-5}\leq 2$ 2) (E) ; $\sqrt{|x-3|}\leq x-1$

Corrigé : 1) Partie1 : L'ensemble de définition de l'inéquation (I) est donc $D_E=\left\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\right\}$.

Partie2 : $\frac{4x^2-3x-9}{x^2-5}\leq 2$ Equivaut à : $\frac{4x^2-3x-9}{x^2-5}-2\leq 0$

Equivaut à : $\frac{4x^2-3x-9-2x^2+10}{x^2-5}\leq 0$

Equivaut à : $\frac{2x^2-3x+1}{x+5}\leq 0$ Equivaut à : $x^2-5x-6=0$

$\Delta = 1 > 0$ donc $x^2-5x-6=0$ admet deux solutions Distinctes $x_1=2$ et $x_2=3$

On obtient le tableau de signes suivant :
(On termine la résolution)

2)On remarque tout d'abord que sur : $]-\infty\,;1[$, $x-1<0$ donc il n'y a pas de solution sur cet intervalle puisque : $\sqrt{|x-3|}\leq x-1$

On cherche donc uniquement des solutions sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
Sur cet intervalle, les deux membres sont positifs, et donc on peut utiliser la croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$:

$\sqrt{|x-3|}\leq x-1$ Equivaut à : $|x-3|\leq (x-1)^2$

Equivaut à : $|x-3|\leq x^2-2x+1$

Comme $x-3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 3$ on est naturellement amené à résoudre sur deux intervalles différents pour faire Disparaître la valeur absolue :

• Sur $[1\,;3[$: $|x-3|\leq x^2-2x+1$ Equivaut à : $-(x-3)\leq x^2-2x+1$

Equivaut à : $-x+3\leq x^2-2x+1$
Equivaut à : $0\leq x^2-2x-2$

On calcule le discriminant du polynôme x^2-2x-2 : $\Delta = 9 > 0$ donc x^2-2x-2 admet deux racines Distinctes $x_1=-1$ et $x_2=2$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Or, on a restreint l'étude à l'intervalle $[1\,;3[$, donc on ne retient que les $x \in [2\,;3[$.

• Sur $[3\,;+\infty[$: $|x-3|\leq x^2-2x+1$ Equivaut à : $x-3\leq x^2-2x+1$

Equivaut à : $0\leq x^2-3x+4$

On calcule le discriminant du polynôme x^2-3x+4 : $\Delta = -7 < 0$.
Donc ; le signe de x^2-3x+4 est du signe de $a=1$
Donc : $x^2-3x+4>0$
Donc, tous les $x \in [3\,;+\infty[$ sont solutions de l'inéquation étudiée sur l'intervalle $[3\,;+\infty[$.
Au final, $S = [2\,;3[\cup[3\,;+\infty[=[2\,;+\infty[$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien