Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°3 : Les polynômes

Exercice1 : (**) Etudier l'égalité des polynômes dans les cas suivants :

1) $P(x)=x^3+2x^2(x-1)+x$ et $Q(x)=x^2(3x-2)+x$

2) $P(x)=(x-1)^3$ et $Q(x)=x^3-3x^2-3x+1$

Solution : Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement s'ils ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

1) $P(x)=x^3+2x^2(x-1)+x=x^3+2x^3-2x^2+x=3x^3-2x^2+x$

$Q(x)=x^2(3x-2)+x=3x^3-2x^2+x$

Donc : $Q=P$

2) $P(x)=(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$

Donc : $P(x)\neq Q(x)$ car $3\neq -3$

Donc : $Q\neq P$

Exercice2 : (**) discuter suivant le paramètre m le degré du polynôme $P(x)$:

$P(x)=(m^3-m)x^3-(m+1)x^2+(m-1)x+11$

Solution : $P(x)=(m^3-m)x^3-(m+1)x^2+(m-1)x+11$

$m^3-m=0$ Signifie que : $m(m^2-1)=0$

Signifie que : $m=0$ ou $m^2-1=0$

Signifie que : $m=0$ ou $m^2=1$

Signifie que : $m=0$ ou $m=-\sqrt{1}$ ou $m=\sqrt{1}$

Signifie que : $m=0$ ou $m=-1$ ou $m=1$

- Si $m\neq -1$ et $m\neq 1$ et $m\neq 0$ alors : $m^3-m\neq 0$ et par suite : $d^\circ P=3$
- Si $m=0$ alors : le polynôme devient : $P(x)=(0^3-0)x^3-(0+1)x^2+(0-1)x+11$

  c'est-à-dire : $P(x)=-x^2-x+11$ et par suite : $d^\circ P=2$
- Si $m=1$ alors : le polynôme devient : $P(x)=(1^3-1)x^3-(1+1)x^2+(1-1)x+11$

  c'est-à-dire : $P(x)=-2x^2+11$ et par suite : $d^\circ P=2$
- Si $m=-1$ alors : le polynôme devient : $P(x)=((-1)^3-(-1))x^3-((-1)+1)x^2+((-1)-1)x+11$

  c'est-à-dire : $P(x)=-2x+11$ et par suite : $d^\circ P=1$

Exercice3 : (**) Soit : $P(x)=x^4-2x^3+x^2-1$ et $Q(x)=ax^5+(b+c)x^4+(c+d)x^3+dx^2+e$

Déterminer a ; b ; c et d pour que : $P=Q$

Solution : $P=Q$ c'est-à-dire : $P(x)=Q(x)$

Cette égalité donne système suivant en comparant deux à deux les termes de mêmes degrés :

$$\begin{cases} a=0 \\ b+c=1 \\ c+d=-2 \\ d=1 \\ c=-1 \end{cases} \text{ Donc } \begin{cases} a=0; d=1; c=-1 \\ c=-2-d=-2-1=-3 \\ b=1-c=1+3=4 \end{cases} \text{ Donc } Q(x)=x^4-2x^3+x^2-1$$

Exercice4 : (**) Soient les nombres a ; b et le polynôme $P(x)=ax^2+bx$

Calculer a et b sachant que : $P(2x)-4P(x)=6x+a+2$

Solution : Nous avons : $P(2x)-4P(x)=a(2x)^2+b(2x)-4(ax^2+bx)$

$P(2x)-4P(x)=4ax^2+2bx-4ax^2-4bx=-2bx$

Donc : $-2bx=6x+a+2$

Equivalent à : $-2b=6$ et $a+2=0$

Equivalent à : $b=-3$ et $a=-2$

Exercice5 : (***) Soit : $P(x)=x^3-3x+2$

1)a) Calculer $P(1)$ et déterminer $Q(x)$ tel que : $P(x)=(x-1)Q(x)$

b) Vérifier que $P(x)=(x+2)(x-1)^2$

2) Soit α un réel tel que : $1<\alpha<2$

Donner un encadrement de $\alpha+2$ et de $(\alpha-1)^2$ et en déduire que : $0<P(\alpha)<4$

Solution :1) a) $P(x)=x^3-3x+2$

$P(1)=1^3-3\times1+2=1-3+2=0$

Donc $P(x)$ soit divisible par $x-1$

Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$

$$\begin{array}{rr|l} & x^3-3x+2 & x-1 \\ \hline + & -x^3+x^2 & x^2+x-2 \\ \hline & x^2-3x+2 & \\ & -x^2+x & \\ \hline & -2x+2 & \\ & 2x-2 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Donc : $P(x)=(x-1)(x^2+x-2)$

b) vérifions que $P(x)=(x+2)(x-1)^2$?

$(x+2)(x-1)^2=(x+2)(x^2-2x+1)$

$=x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2=x^2-4x+2=P(x)$

2) $1<\alpha<2$ donc $3<\alpha+2<4$ (1) c'est-à-dire : $0<\alpha-1<1$ donc $0<(\alpha-1)^2<1$ (2)

De (1) et (2) on a alors : $0<(\alpha+2)(\alpha-1)^2<4$ par suite : $0<P(\alpha)<4$

Exercice6 : (**) Soit : $P(x)=x^3-3x^2-6x+8$

1) Montrer que1 est racine du polynôme P

2) Montrer que $P(x)=(x-1)Q(x)$ ou $Q(x)$ est un polynôme à déterminer

3) Montrer que -2 est racine du polynôme Q

4) En déduire une factorisation du polynôme P on polynômes de 1ere degrés

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

Solution :1) On a $P(1)=1^3-3\times1^2-6\times1+8=1-3-6+8=0$ donc 1 est racine du polynôme P

Donc $P(x)$ est divisible par $x-1$

2) Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$ on trouve : $P(x)=(x-1)(x^2-2x-8)$ ①

Donc : $Q(x)=x^2-2x-8$

3) On a : $Q(-2)=(-2)^2-2(-2)-8=4+4-8=0$

Donc -2 est racine du polynôme Q Donc $Q(x)$ est divisible par $x+2$

4) Effectuons la division euclidienne de $Q(x)$ par $x+2$

On trouve : $Q(x)=(x+2)(x-4)$ ②

D'après ① et ② on a : $P(x)=(x-1)(x+2)(x-4)$

5) $P(x)=0$ signifie que $(x-1)(x+2)(x-4)=0$

Signifie que : $x-1=0$ ou $x+2=0$ ou $x-4=0$

$P(x)=0$ Signifie que $x=1$ ou $x=-2$ ou $x=4$ les racines du polynôme $P(x)$

Donc : $S=\{-2;1;4\}$

Exercice7 : (***) Soit : $P(x)=2x^3+3x^2+ax+b$ avec : $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

1) Déterminer a et b tels que :

a) $P(x)$ soit divisible par $x-2$

b) Le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$ est -12

2) Factoriser $P(x)$ dans ce cas

Solution :1) $P(x)=2x^3+3x^2+ax+b$

a) $P(x)$ soit divisible par $x-2$ donc : $P(2)=0$

Donc : $2\times2^3+3\times2^2+a\times2+b=0$ c'est-à-dire : $2a+b+28=0\ (1)$

b) Le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$ est -12.

Donc : $P(1)=-12$ donc : $a-b+17=0\ (2)$

Donc le couple (a,b) est solution du système suivant : $\begin{cases}2a+b+28=0\\ a-b+17=0\end{cases}$

En résolvant le système on trouve : $a=-11$et $b=-6$

Donc : $P(x)=2x^3+3x^2-11x-6$

2) Factorisation de $P(x)$ dans ce cas :

$$\begin{array}{r|l}
2x^3+3x^2-11x-6 & x-2 \\ \cline{2-2}
-2x^3+4x^2 \qquad\qquad\quad & 2x^2+7x+3 \\ \cline{1-1}
7x^2-11x-6 & \\
-7x^2+14x \qquad & \\ \cline{1-1}
+ \quad 3x-6 & \\
-3x+6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$P(x)$ Soit divisible par $x-2$ donc : $P(x)=(x-2)(2x^2+7x+3)$

Exercice8 : (***) Soit le polynôme suivant : $P(x)=x^3+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}+2\right)x^2+\left(4\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}\right)x-4\sqrt{6}$

1) Montrer que -2 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que : $P(x)=(x+2)\left(x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\right)$

3) On pose : $Q(x)=x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$ et soit Δ son discriminant

a) vérifier que : $\Delta=14+4\sqrt{6}$ et compléter : $14+4\sqrt{6}=(...+....)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) En déduire les solutions de l'équation : $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x)\geq0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\leq 0$

Solution : 1) $P(-2)=(-2)^3+(2\sqrt{3}-\sqrt{2}+2)(-2)^2+(4\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6})(-2)-4\sqrt{6}$

$P(-2)=-8+8\sqrt{3}-4\sqrt{2}+8-8\sqrt{3}+4\sqrt{2}+4\sqrt{6}-4\sqrt{6}=0$

-2 est racine du polynôme $P(x)$

2) $(x+2)\left(x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}\right)=x^3+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x^2-2\sqrt{6}x+2x^2+2(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-4\sqrt{6}$

$=x^3+(2\sqrt{3}-\sqrt{2}+2)x^2+(4\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6})x-4\sqrt{6}=P(x)$

3) a) On pose : $Q(x)=x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}$ et soit Δ son discriminant :

$a=1$; $b=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$; $c=-2\sqrt{6}$ et $\Delta=b^2-4ac=(2\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-4\times(-2\sqrt{6})\times 1$

$\Delta=(2\sqrt{3})^2-2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2+8\sqrt{2}\times\sqrt{3}=12+4\sqrt{6}+2=14+4\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$

$\Delta=12+4\sqrt{6}+2=(2\sqrt{3})^2+2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2$ Par suite : $\Delta=(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$

3)b) $Q(x)=x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}$ et $\Delta=(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$

Puisque : $\Delta\succ 0$ donc il y'a deux racines : $x_1=\dfrac{-(2\sqrt{3}-\sqrt{2})+\sqrt{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}}{2\times 1}=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+|2\sqrt{3}+\sqrt{2}|}{2\times 1}$

ET $x_2=\dfrac{-(2\sqrt{3}-\sqrt{2})-\sqrt{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}}{2\times 1}=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-|2\sqrt{3}+\sqrt{2}|}{2\times 1}$

Or on a : $2\sqrt{3}+\sqrt{2}\succ 0$ par suite : $|2\sqrt{3}+\sqrt{2}|=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$

Donc: $x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times 1}=\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times 1}=-2\sqrt{3}$ Par suite: $S=\{-2\sqrt{3},\sqrt{2}\}$

4) $x+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

Est équivalente à : $(\sqrt{x})^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ et on a donc : $X^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})X-2\sqrt{6}=0$

Mais d'après 3) b) on a : $X_1=-2\sqrt{3}$ et $X_2=\sqrt{2}$

Qui Signifie que: $\sqrt{x_1}=-2\sqrt{3}$ et $\sqrt{x_2}=\sqrt{2}$

Or $\sqrt{x_1}=-2\sqrt{3}$ n'a pas de solution

Donc: $(\sqrt{x_2})^2=(\sqrt{2})^2$ qui Signifie que: $x_2=2$ Par suite: $S=\{2\}$

5) $Q(x)\geq 0$ on a $x_1=\sqrt{2}$ et $x_2=-2\sqrt{3}$

Donc: le tableau de Signe est:

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

6) On a : $P(x)=(x+2)\left(x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\right)$

$P(x)=0$ Signifie: $x+2=0$ ou $x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

Signifie: $x_0=-2$ ou $x_1=\sqrt{2}$ ou $x_2=-2\sqrt{3}$ Donc: $S=\left\{-2,\sqrt{2},-2\sqrt{3}\right\}$

7) $P(x)\leq 0$ Signifie: $(x+2)\left(x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\right)\leq 0$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		-2		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[-2;\sqrt{2}\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien