Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°3 :

Système d'équations du premier degré a deux inconnues

Exercice1 : (*) Résoudre le système dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 6x - y = 5 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$ Par la Méthode de substitution

Solution : Dans le système $\begin{cases} 6x - y = 5 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$, on exprime par exemple *y* en fonction de *x* dans la première équation et on obtient le système équivalent : $\begin{cases} y = 6x - 5 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$.

On remplace ensuite *y* par : $6x-5$ dans la seconde équation, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} y = 6x - 5 \\ x - 3(6x-5) = -2 \end{cases}$$

qui équivaut à $\begin{cases} y = 6x - 5 \\ -17x + 15 = -2 \end{cases}$ soit encore à $\begin{cases} y = 6x - 5 \\ x = 1 \end{cases}$

Et on remplace *x* par 1 dans la première équation on trouve $\begin{cases} y = 6\times 1 - 5 = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

On obtient ainsi le couple solution : Donc : $S = \{(1,1)\}$

Exercice2 : (*) Résoudre le système dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 10x + 8y = -2 \; (a) \\ -7x + 4y = 11 \; (b) \end{cases}$

Par la Méthode de combinaison linéaire

Solution : Cette méthode consiste à faire apparaître des coefficients opposés pour l'une des inconnues, en multipliant les équations par des facteurs bien choisis. En additionnant membre à membre les deux équations transformées, on obtient une équation à une seule inconnue que l'on peut résoudre.

Dans le système $\begin{cases} 10x + 8y = -2 \; (a) \\ -7x + 4y = 11 \; (b) \end{cases}$, on multiplie les termes de la seconde équation par (-2) et on

Obtient le système équivalent : $\begin{cases} 10x + 8y = -2 \\ 14x - 8y = -22 \end{cases}$.

On additionne membre à membre les deux équations et obtient l'équation : $24x = -24$ donc : $x = -1$

Et on remplace *x* par -1 dans la première équation on trouve $\begin{cases} 10\times -1 + 8y = -2 \\ x = -1 \end{cases}$ soit encore à $\begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

On obtient ainsi le couple solution et par suite : $S = \{(-1,1)\}$

Exercice3 : (*) Résoudre le système dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$

Par les 4 Méthodes suivantes :
1) Par la Méthode de substitution
2) Par la méthode des combinaisons linéaires

3) Méthode graphique
4) Méthode des déterminants

Solution : 1) Par la *Méthode de substitution :* l'équation $3x+y=5$ on peut écrite que. $y=5-3x$

On obtient alors le système : $\begin{cases} y=5-3x \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$

On va maintenant remplacer le y de la seconde équation par son expression en fonction de x qu'on vient de trouver. Cela donne alors : $\begin{cases} y=5-3x \\ 2x-3(5-3x)=-4 \end{cases}$

On développe et on simplifie l'écriture de la deuxième équation : $\begin{cases} y=5-3x \\ 11x=11 \end{cases}$ On résout maintenant l'équation du premier degré pour trouver la valeur de x : $\begin{cases} y=5-3x \\ x=1 \end{cases}$

Maintenant qu'on connaît la valeur de x, il ne nous reste plus qu'à remplacer x par sa valeur dans la première équation. $\begin{cases} y=5-3\times1=2 \\ x=1 \end{cases}$ On finit les calculs : $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

La solution de notre système est donc : $S=\{(1,2)\}$

Il peut être utile de procéder à une vérification. Pour cela, on remplace les inconnues par les valeurs qu'on vient de trouver dans chacune des équations et on vérifie si on retrouve bien l'égalité :

$$\begin{cases} 3\times1+2=3+2=5\checkmark \\ 2\times1-3\times2=2-6=-4\checkmark \end{cases}$$

2) Par la méthode combinaison linéaire ou méthode par addition.
Le but de cette méthode est de multiplier les équations par des nombres judicieusement choisis pour qu'en additionnant ou soustrayant les équations on n'ait plus qu'une seule inconnue.
On va chercher, par exemple, à "éliminer" l'inconnue x. Pour cela on va :
multiplier la première équation par 2 qui est le coefficient de l'inconnue de la seconde équation.
Multiplier la seconde équation par 3 qui est le coefficient de l'inconnue de la première équation.

On obtient alors le système : $\begin{cases} 6x+2y=10 \\ 6x-9y=-12 \end{cases}$

On va maintenant soustraire nos deux équations pour ainsi ne plus avoir de termes en x.

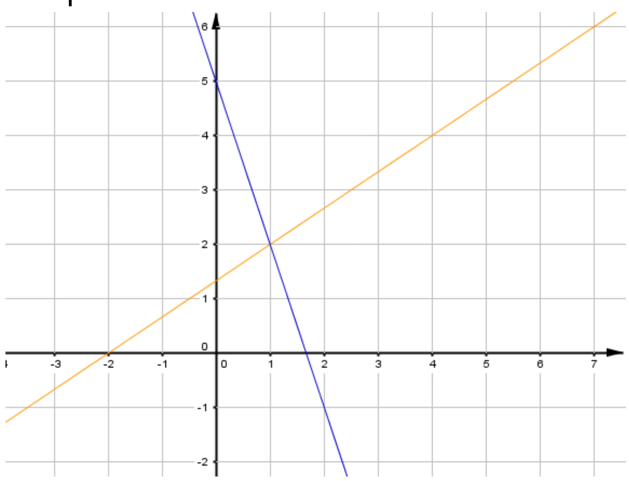
$$\begin{array}{lllll} & 6x & + & 2y & =10 \\ -(& 6x & - & 9y & =-12) \\ \hline & & & 11y & =22 \\ & & \text{donc} & y & =2 \end{array}$$

On remplace maintenant cette valeur dans l'une des deux équations :
Si on choisit la première équation $3x+2=5$ soit $3x=3$ et donc $x=1$.

La solution du système est donc : $S=\{(1,2)\}$

3) Méthode graphique : Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$

Les équations du type $ax+by=c$ correspond en fait à des équations de droite.
La solution du système correspond aux coordonnées, dans un repère, du point d'intersection des deux droites.



On a tracé les deux droites associées au système
On lit les coordonnées du point d'intersection $(1,2)$

Donc $S=\{(1,2)\}$

On distingue alors trois cas dans la résolution des systèmes graphiquement :

- Si les droites sont parallèles et distinctes, le système (S) n'admet aucun couple solution.
- Si les droites) sont sécantes, le système (S) admet une solution unique.
- Si les droites sont confondues, alors le système (S) admet une infinité de couples solutions.

4) Méthode des déterminants : On calcule le déterminant du système suivant $(I)\begin{cases}2x+3y=7\\3x-2y=4\end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & -2\end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times3=-13\neq0$$

Alors le système (I) admet un couple solution unique :

$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix}7 & 3\\4 & -2\end{vmatrix}}{-13}=\dfrac{-26}{-13}=2$ et $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 7\\3 & 4\end{vmatrix}}{-13}=\dfrac{-13}{-13}=1$ donc : $S=\{(1,2)\}$

Exercice4 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases}x-2y=1\\-2x+4y=-2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-4y=2\\-x+\dfrac{4}{3}y=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)x+\left(\sqrt{2}-1\right)y=0\\\left(\sqrt{2}+1\right)x+\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)y=1\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+y=11\\x^2-y^2=44\end{cases}$

Solution :1) $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2\\-2 & 4\end{vmatrix}=0$

$$\begin{cases}x-2y=1\\-2x+4y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=1\\-2(x-2y)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=1\\x-2y=1\end{cases}\Leftrightarrow x-2y=1\Leftrightarrow -2y=1-x\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x$$

Donc le système admet une infinité de solutions : $S=\left\{\left(x;\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$

2) $\begin{cases}3x-4y=2\\-x+\dfrac{4}{3}y=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$ On multiplie les 2 iem équations par -3

On aura : $\begin{cases}3x-4y=2\\3x-4y=1\end{cases}$ donc 2=1 Impossible donc : $S=\varnothing$

3) $\begin{cases}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)x+\left(\sqrt{2}-1\right)y=0\\\left(\sqrt{2}+1\right)x+\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)y=1\end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\sqrt{5}-\sqrt{3} & \sqrt{2}-1\\\sqrt{2}+1 & \sqrt{5}+\sqrt{3}\end{vmatrix}=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$\Delta=\left(\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)-\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-(1)^2\right)$ Donc : $\Delta=(5-3)-(2-1)=1\neq0$

$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & \sqrt{2}-1\\ 1 & \sqrt{5}+\sqrt{3}\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-\left(\sqrt{2}-1\right)}{1}=-\sqrt{2}+1=1-\sqrt{2}$ $y=\frac{\begin{vmatrix}\sqrt{5}-\sqrt{3} & 0\\ \sqrt{2}+1 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{1}=-\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{3}-\sqrt{5}$

Donc **:** $S=\left\{\left(1-\sqrt{2},\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\right\}$

4) $\begin{cases}x+y=11\\ x^2-y^2=44\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=11\\ (x+y)(x-y)=44\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=11\\ 11(x-y)=44\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=11\\ x-y=4\end{cases}$

On fait la somme membre a membre on trouve : $x+y+x-y=11+4$ c'est-à-dire : $2x=15$

Donc : $x=\frac{15}{2}$ et par suite : $\frac{15}{2}+y=11$ donc : $y=\frac{7}{2}$ alors on a : $S=\left\{\left(\frac{15}{2},\frac{7}{2}\right)\right\}$

Exercice5 : (**)) 1) On considère le système suivant : $\begin{cases}45x+30y=510\\ 27x+20y=316\end{cases}$

a) Les nombres $x=10$ et $y=2$ sont-ils solutions de ce système ?
b) Résoudre le système.
2) Pour les fêtes de fin d'année, un groupe d'amis souhaite emmener leurs enfants assister à un spectacle.
Les tarifs sont les suivants :
- 45 dh par adulte et 30 par enfant s'ils réservent en catégorie 1.
- 27 dh par adulte et 20 dh par enfant s'ils réservent en catégorie 2.

Le coût total pour ce groupe d'amis est de 510 dh s'ils réservent en catégorie 1 et 316 dh s'ils réservent en catégorie 2.
Déterminer le nombre d'adultes et d'enfants de ce groupe?
Solution : 1). a. Regardons si les nombres $x=10$
Et $y=2$ vérifient chacune des deux équations

$45\times10+30\times2=450+60=510\checkmark$
$27\times10+20\times2=270+40=310\neq316$

Le couple $(10,2)$ n'est donc pas solution du système.

b. Nous allons résoudre ce système à l'aide de combinaisons linéaires :

$$\begin{cases}45x+30y=510 & (\times20)\\ 27x+20y=316 & (\times30)\end{cases}$$

$$\begin{array}{rcrcl} & 900x & + & 600y & =10\ 200\\ -(& 810x & + & 600y & =9\ 480)\\ \hline & 90x & & & =720\\ & & \text{donc} & x & =8\end{array}$$

On reporte ce résultat dans la première équation :
$45\times8+30y=510$ soit $360+30y=510$
Donc : $30y=150$ d'où : $y=5$.

On vérifie que le couple $(8,5)$ est bien solution de

la seconde équation :
$27\times8+20\times5=216+100=316\checkmark$.

Par conséquent la solution du système est : $(8,5)$

Par suite : $S=\{(8,5)\}$

2. On appelle A le nombre d'adultes et E le nombre d'enfants.
Avec la première catégorie on obtient l'équation $45A+30E=510$.
Avec la seconde catégorie on obtient l'équation $27A+20E=316$.
On est donc ramené à résoudre le système :

$$\begin{cases} 45A + 30E = 510 \\ 27A + 20E = 316 \end{cases}$$

D'après la question précédente le couple $(8,5)$ est solution de ce système.

Exercice6 : (**)) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + y = 630 \\ 18x + 30y = 14220 \end{cases}$

2) Dans un parc zoologique, la visite coûte 30 DH pour les adultes et 18 DH pour les enfants.
A la fin d'une journée, on sait que 630 personnes ont visité le zoo et que la recette du jour est de 14220 DH. Parmi les personnes qui ont visité le zoo ce jour-là, quel est le nombre d'enfants ? Quel est le nombre d'adultes ?

Solution : 1) Résolution du système : $\begin{cases} x + y = 630 \\ 18x + 30y = 14220 \end{cases}$ Utilisons la méthode par substitution :

$\begin{cases} x + y = 630 \\ 18x + 30y = 14220 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x = 630 - y \\ 18x + 30y = 14220 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x = 630 - y \\ 18(630 - y) + 30y = 14220 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x = 630 - y \\ 11340 - 18y + 30y = 14220 \end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases} x = 630 - y \\ 12y = 2880 \end{cases}$ c'est à dire : $\begin{cases} x = 390 \\ y = 240 \end{cases}$

2) Soit x le nombre d'enfants qui ont visité le zoo et y le nombre d'adultes.
On sait que 630 personnes ont visité le zoo : cette donnée s'écrit : x + y = 630
La visite coûte 30 F pour les adultes et 18 F pour les enfants. La recette du jour est de 14 220 F.
Ces données s'écrivent :18x + 30y = 14220
On retrouve les deux équations de la question précédente.
Par conséquent, 390 enfants et 240 adultes ont visité le zoo.

Exercice7 : (**) Un cirque propose deux tarifs d'entrée : un pour les adultes et un pour les enfants.
Un groupe de trois enfants avec un adulte paie 290 DH.
On peut traduire ces données par l'équation à deux inconnues : 3x + y = 290
Un autre groupe de 5 enfants avec quatre adultes paie 705 DH.
1)Ecrire alors une deuxième équation et résoudre le système obtenu de deux équations à deux inconnues.
2)Donner le prix d'une entrée pour un enfant et celui d'une entrée pour une adulte.

Solution :1) Si "un groupe de trois enfants avec un adulte paie 290 DH " s'écrit 3x + y = 290, c'est que x, représente le tarif d'entrée pour les enfants et y le tarif d'entrée pour les adultes.

"Un autre groupe de 5 enfants avec quatre adultes paie 705 DH " s'écrira

Donc : 5x + 4y = 705

Et on obtient le système suivant à résoudre pour déterminer la valeur de x et y : $\begin{cases} 3x + 1y = 290 \\ 5x + 4y = 705 \end{cases}$

Résolution du système : On résoud le système par substitution : $\begin{cases} y = 290 - 3x \\ 5x + 4(290 - 3x) = 705 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} y = 290 - 3x \\ 5x + 1160 - 12x = 705 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y = 290 - 3x \\ -7x = -455 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = 65 \\ y = 95 \end{cases}$

2) Le tarif enfant est de 65 DH et le tarif adulte est de 95 DH.

Exercice8 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ et graphiquement le système suivant : $\begin{cases} 4x-y=2 \\ 2x-y=-2 \end{cases} (I)$

Solution : Cette méthode consiste à relier chaque équation à une droite, puis on représente chacune des droites dans un même repère orthonormé. La solution, si elle existe, est donnée par les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

 Pour chaque équation on exprime y en fonction de x, et on obtient :

$\begin{cases} -y=-4x+2 \\ -y=-2x-2 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} y=4x-2 \\ y=2x+2 \end{cases}$

Dans un repère on trace les deux droites (D_1) d'équation : $y=4x-2$,

et (D_2) d'équation : $y=2x+2$

Pour : (D_1) d'équation : $y=4x-2$ pour tracer (D_1) on va chercher deux points :

Si : $x=0$ alors : $y=4\times 0-2=-2$ donc : $A(0;-2)\in(D_1)$

Si : $x=1$ alors : $y=4\times 1-2=4-2=2$ donc : $B(1;2)\in(D_1)$

Et on peut tracer : $(D_1)=(AB)$

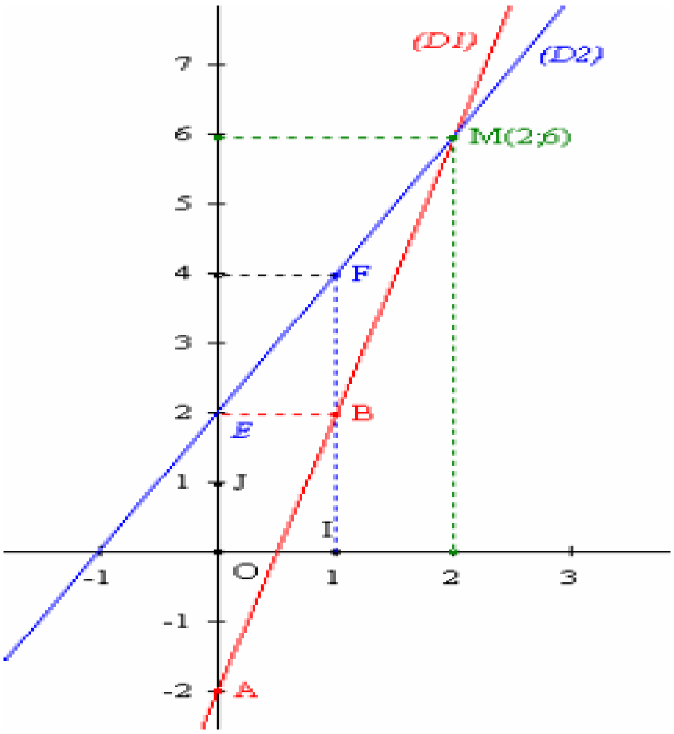
Pour : (D_2) d'équation : $y=2x+2$ pour tracer (D_2) on va chercher deux points :

Si : $x=0$ alors : $y=2\times 0+2=2$ donc : $E(0;2)\in(D_1)$

Si : $x=1$ alors : $y=2\times 1+2=2+2=4$ donc : $F(1;4)\in(D_2)$

Et on peut tracer : $(D_2)=(EF)$

Dans un repère orthonormé, on trace les deux droites (D_1) et (D_2)



Les deux droites (D_1) et (D_2) se coupent en un point : $M(2;6)$

 Alors le couple $(2;6)$ est la solution de ce système.

Remarque : Si les deux droites ont le même coefficient directeur, alors le système n'a pas de solution.
Si les deux droites ont le même coefficient directeur et le même ordonné à l'origine, alors le système a plusieurs solutions.

Exercice9 :(**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} -5\sqrt{x}+7\sqrt{y}=-9 \\ 2\sqrt{x}+8\sqrt{y}=36 \end{cases}$

Solution : Soient : $x\geq 0$ et $y\geq 0$

On pose : $\begin{cases} X=\sqrt{x} \\ Y=\sqrt{y} \end{cases}$ Donc on a: $\begin{cases} -5X+7Y=-9 \\ 2X+8Y=36 \end{cases}$

$\begin{cases} -5X+7Y=-9 \\ 2X+8Y=36 \end{cases}$ Signifie que :

$\begin{cases} -5X+7Y=-9 & (L_1) \\ 2X+8Y=36 & (L_2) \end{cases}$ Qui Signifie que : $\begin{cases} -5X+7Y=-9 & (L_1) \\ 54Y=162 & (5L_2+2L_1) \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} -5X+7Y=-9 \\ Y=3 \end{cases}$

Signifie que : $\begin{cases} -5X+21=-9 \\ Y=3 \end{cases}$ Signifie que : $\begin{cases} X=6 \\ Y=3 \end{cases}$

Donc: $X=6$ et $Y=3$

et puisque on a noté : $\begin{cases} X=\sqrt{x} \\ Y=\sqrt{y} \end{cases}$

Donc : $\sqrt{x}=6$ et $\sqrt{y}=3$

Donc : $\left(\sqrt{x}\right)^2=6^2$ et $\left(\sqrt{y}\right)^2=3^2$ c'est-à-dire : $x=36$ et $y=9$

Donc : $S=\left\{(36,9)\right\}$

Exercice10 :(**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} \dfrac{5}{x-1}+\dfrac{3}{y-2}=4 \\ \dfrac{-2}{x-1}+\dfrac{1}{y-2}=1 \end{cases}$

Solution : Pour que le système existe il faut que : $x\neq 1$et $y\neq 1$ on pose : $X=\dfrac{1}{x-1}$ et $Y=\dfrac{1}{y-2}$

Le système devient : $\begin{cases} 5X+3Y=4 \\ -2X+Y=1 \end{cases}$

On résolve ce système et on trouve : $X=\dfrac{1}{11}$ et $Y=\dfrac{13}{11}$

Donc : $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{11}$ et: $\dfrac{1}{y-2}=\dfrac{13}{11}$ c'est-à-dire : $x-1=11$et $y-2=\dfrac{11}{13}$

Donc : $x=12$ et $y=\dfrac{37}{13}$ par suite : $S=\left\{\left(12,\dfrac{37}{13}\right)\right\}$

Exercice11 :(** *) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes : $\sqrt{x-1}=2$ et $\dfrac{1}{2y+1}=-1$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 3x-5y=11 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$

3)Déduire des questions précédents les solutions du système : $\begin{cases} 3\sqrt{x-1}-\dfrac{5}{2y+1}-11=0 \\ -2\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{2y+1}+5=0 \end{cases}$

Solution : 1) soit $x \geq 1$: a) $\sqrt{x-1}=2$ équivalent : $\left(\sqrt{x-1}\right)^2=2^2$ équivalent : $x-1=4$
Équivalent : $x=5$
Donc : $S=\{5\}$

a) soit $y \neq -\dfrac{1}{2}$: $\dfrac{1}{2y+1}=-1$ équivalent : $2y+1=-1$ équivalent : $2y=-2$ Équivalent : $y=-1$
Donc : $S=\{-1\}$

2) Résolution dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases} 3x-5y=11 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x-5y=11 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} 6x-10y=22 & (\times 2) \\ -6x+3y=-15 & (\times 3) \end{cases}$

Donc : la somme des équations donne : $6x-10y-6x+3y=22-15$
Équivalent : $-7y=7$ Équivalent : $y=-1$
On a : $-2x+y=-5$ donc : $-2x-1=-5$ Équivalent : $x=2$
La solution du système est donc : $S=\{(2,-1)\}$

3) Déduction des questions précédents des solutions du système : $\begin{cases} 3\sqrt{x-1}-\dfrac{5}{2y+1}-11=0 \\ -2\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{2y+1}+5=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3\sqrt{x-1}-\dfrac{5}{2y+1}-11=0 \\ -2\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{2y+1}+5=0 \end{cases}$ Équivalent : $\begin{cases} 3\sqrt{x-1}-5\dfrac{1}{2y+1}=11 \\ -2\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{2y+1}=-5 \end{cases}$

On pose : $\begin{cases} X=\sqrt{x-1} \\ Y=\dfrac{1}{2y+1} \end{cases}$ Donc on a: $\begin{cases} 3X-5Y=11 \\ -2X+Y=-5 \end{cases}$

Des questions précédentes on déduit que : $X=2$ et $Y=-1$

Donc : $\sqrt{x-1}=2$ et $\dfrac{1}{2y+1}=-1$ Équivalent : $x=5$ et $y=-1$

Par suite : $S=\{(5,-1)\}$

Exercice12 :(**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants : $\begin{cases} x-(y-1)^2=-8 \\ 4x+3(y-1)^2=31 \end{cases}$

Solution : On pose : $\begin{cases} X=x \\ Y=(y-1)^2 \end{cases}$ Le système devient : $\begin{cases} X-Y=-8 \\ 4X+3Y=31 \end{cases}$

Le déterminant du système est : $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=3+4=7\neq 0$

Donc : $X=\frac{\Delta_X}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}-8 & -1\\ 31 & 3\end{vmatrix}}{7}=\frac{-24+31}{7}=\frac{7}{7}=1$ et $Y=\frac{\Delta_Y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -8\\ 4 & 31\end{vmatrix}}{7}=\frac{31+32}{7}=\frac{63}{7}=9$

Donc : $X=1$ et $Y=9$

Donc : $x=1$ et $(y-1)^2=9$

Donc : $x=1$ et $y-1=\sqrt{9}=3$ ou $y-1=-\sqrt{9}=-3$ c'est-à-dire : $x=1$ et $y=4$ ou $y=-2$

Par suite : $S=\{(1,42);(1,-2)\}$

Exercice13 : (***) On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $(I)\begin{cases}(m+2)x+y=m+1\\ 9x+(m+2)y=6\end{cases}$

On va utiliser la Méthode des déterminants pour Résoudre ce système

On pose : $\Delta=\begin{vmatrix}m+2 & 1\\ 9 & m+2\end{vmatrix}$ et $\Delta_x=\begin{vmatrix}m+1 & 1\\ 6 & m+2\end{vmatrix}$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix}m+2 & m+1\\ 9 & 6\end{vmatrix}$

1)a) Vérifier que : le déterminant du système est : $\Delta=(m-1)(m+5)$

b) En déduire les valeurs de m pour lesquelles : $\Delta=0$

2) Vérifier que : $\Delta_x=(m-1)(m+4)$ et $\Delta_y=-3(m-1)$

3) On suppose que : $m\neq 1$ et $m\neq -5$

a) Montrer que le système (I) admet un couple unique comme solution.

b) Résoudre le système (I) avec simplification des résultats.

c) En déduire la résolution du système : $(2)\begin{cases}-x+y=-2\\ 9x-y=6\end{cases}$

4) On suppose que : $m=1$

a) Ecrie le système dans ce cas, on le note (3).

b) Quel est le nombre de solution du système (3).

c) Résoudre le système (3)

5) On suppose que : $m=-5$

a) Ecrie le système dans ce cas, on le note (4).

b) Quel est le nombre de solution du système (4).

c) Résoudre le système (4)

Solution : 1) a) On calcule le déterminant du système (I)

$$\Delta=\begin{vmatrix}m+2 & 1\\ 9 & m+2\end{vmatrix}=(m+2)\times(m+2)-9\times 1=(m+2)^2-3^2=(m+2-3)(m+2+3)=(m-1)(m+5)$$

b) $\Delta=0$ Signifie que : $(m-1)(m+5)=0$ Signifie que : $m-1=0$ ou $m+5=0$

$\Delta=0$ Signifie que : $m=1$ ou $m=-5$

2) Vérifions que : $\Delta_x=(m-1)(m+4)$ et $\Delta_y=-3(m-1)$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 6 & m+2 \end{vmatrix} = (2+m)(1+m) - 6 = m^2 + 2m + m + 2 - 6 = m^2 + 3m - 4$: a = 1, b = 3 ; c = -4

Le discriminent est : $b^2 - 4ac = 3^2 + 16 = 25 > 0$

Donc : $m_1 = \frac{-3-\sqrt{25}}{2a} = \frac{-3-5}{2\times1} = \frac{-8}{2} = -4$ et $m_2 = \frac{-3+\sqrt{25}}{2a} = \frac{-3+5}{2\times1} = \frac{2}{2} = 1$

Donc : $\Delta_x = m^2 + 3m - 4 = 1(m-(-4))(m-1) = (m+4)(m-1)$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} m+2 & m+1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 6(2+m) - 9(1+m) = 12 + 6m - 9m - 9 = 3 - 3m = -3(m-1)$

3) On suppose que : $m \neq 1$ et $m \neq -5$

Dans ce *cas* : $\Delta \neq 0$

Alors le système (I) admet un couple solution unique :

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{(m-1)(m+4)}{(m-1)(m+5)} = \frac{m+4}{m+5}$ et $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-3(m-1)}{(m-1)(m+5)} = -\frac{3}{m+5}$

Donc : $S = \left\{\left(\frac{m+4}{m+5}; -\frac{3}{m+5}\right)\right\}$

c) Déduction de la résolution du système : $(2)\begin{cases} -x + y = -2 \\ 9x - y = 6 \end{cases}$

On pose : $m = -3$ dans : $(I)\begin{cases} (m+2)x + y = m+1 \\ 9x + (m+2)y = 6 \end{cases}$ on obtient : $(2)\begin{cases} -x + y = -2 \\ 9x - y = 6 \end{cases}$

Et puisque: $-3 \neq 1$ et $-3 \neq -5$

Donc : $S = \left\{\left(\frac{-3+4}{-3+5}; -\frac{3}{-3+5}\right)\right\}$ c'est-à-dire : $S = \left\{\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)\right\}$

4) On suppose que : $m = 1$

a) Ecriture du système dans ce cas, on le note (3) :

Si $m = 1$ alors $\Delta = 0$

On remplace m par 1 dans $\begin{cases} (m+2)x + y = m+1 \\ 9x + (m+2)y = 6 \end{cases}$: on trouve : $(3)\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 9x + 3y = 6 \end{cases}$

Qui est équivalent à : $(3)\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

Qui est équivalent à (3): $3x + y = 2$

b) Dans ce cas résoudre le système c'est résoudre l'équation (3): $3x + y = 2$

Ce système a une infinité de solutions

c) $3x + y = 2$ est équivalent a : $y = 2 - 3x$

Alors on a : $S = \{(x; 2-3x) / x \in \mathbb{R}\}$

5) On suppose que : $m = -5$

a) Si $m = -5$ alors $\Delta = 0$

On remplace m par -5 dans $\begin{cases} (m+2)x + y = m+1 \\ 9x + (m+2)y = 6 \end{cases}$ on trouve : $\begin{cases} -3x + y = -4 \\ 9x - 3y = 6 \end{cases}$

Qui est équivalent à : $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

b) (3) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ impossible donc : Ce système n'a pas de solutions

c) $S = \varnothing$

Exercice14 : (***) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ et discuter suivant le paramètre m le système suivant :

$$\begin{cases} (m+1)x + 3y = m \\ 3x + (m+1)y = 2 \end{cases} \quad (I)$$

Solution :1) On utilise la Méthode des déterminants

On calcule le déterminant du système (I)

$$\Delta = \begin{vmatrix} m+1 & 3 \\ 3 & m+1 \end{vmatrix} = (m+1)\times(m+1) - 3\times 3 = (m+1)^2 - 3^2 = (m+1-3)(m+1+3) = (m-2)(m+4)$$

$\Delta = 0$ Signifie que : $(m-2)(m+4) = 0$ Signifie que : $m-2=0$ ou $m+4=0$

$\Delta = 0$ Signifie que : $m = 2$ ou $m = -4$

1ere cas : si $\Delta \neq 0$ c'est-à-dire : $m \neq 2$ et $m \neq -4$ Alors le système (I) admet un couple solution

unique : $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} m & 3 \\ 2 & m+1 \end{vmatrix}}{(m-2)(m+4)} = \dfrac{m(1+m)-6}{m^2-1} = \dfrac{m^2+m-6}{(m-2)(m+4)} = \dfrac{(m-2)(m+3)}{(m-2)(m+4)} = \dfrac{m+3}{m+4}$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} m+1 & m \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{(m-2)(m+4)} = \frac{2(1+m)-3m}{(m-2)(m+4)} = \frac{-(m-2)}{(m-2)(m+4)} = -\frac{1}{m+4}$$

Donc : $S = \left\{ \left(\dfrac{m+3}{m+4}; -\dfrac{1}{m+4} \right) \right\}$

2ere cas : si $\Delta = 0$ c'est-à-dire : $m = 2$ ou $m = -4$

Si $m = 2$ on remplace m par 2 on trouve : $\begin{cases} 3x + 3y = 2 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases}$ qui est équivalent a : $3x + 3y = 2$

Dans ce cas résoudre le système c'est résoudre l'équation $3x + 3y = 2$

$3x + 3y = 2$ est équivalent a : $3y = 2 - 3x$ Signifie que : $y = \dfrac{2}{3} - x$

Alors on a : $S = \left\{ \left(x; \dfrac{2}{3} - x \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$

Si $m = -4$ on remplace m par -4 on trouve : $\begin{cases} -3x + 3y = -4 \\ 3x - 3y = 2 \end{cases}$

Qui est équivalent à : $\begin{cases} 3x - 3y = 4 \\ 3x - 3y = 2 \end{cases}$ impossible Donc: $S = \varnothing$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien