Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°3 : TRIGONOMÉTRIE1

Exercice1 : (*) Calculer la longueur L de l'arc AB d'un cercle (C) de rayon $R=60cm$ et tel que : $\alpha=\left(\overline{AOB}\right)=70gr$

Solution : D'abord on va convertir $70gr$ en radian : $\alpha=70\times\frac{\pi}{200}=\frac{7\pi}{20}$ rad.

Donc : $L=R\times\alpha=60\times\frac{7\pi}{20}cm=21\pi cm\simeq 65,94cm$

Exercice2 : (*) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des points suivants $M_0\left(\frac{9\pi}{2}\right)$; $M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right)$; $M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right)$; $M_3\left(\frac{19\pi}{3}\right)$;$M_4\left(\frac{181\pi}{6}\right)$

Solution :

▪ $x=\frac{9\pi}{2}$

Methode1: $\frac{9\pi}{2}=\frac{8\pi+\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=4\pi+\frac{\pi}{2}=2\times2\pi+\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisses curviligne principale du point M_0 est $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Methode2: $-\pi<\frac{9\pi}{2}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1<\frac{9}{2}+2k\leq1$ c'est-à-dire : $-1-\frac{9}{2}<-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+2k\leq1-\frac{9}{2}$

Donc $-\frac{11}{2}<2k\leq-\frac{7}{2}$ par suite : $-\frac{11}{4}<k\leq-\frac{7}{4}$

Donc $-2,7\simeq-\frac{11}{4}<k\leq-\frac{7}{4}\simeq-1,7$ et $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $k=-2$

Par suite : $\alpha=\frac{9\pi}{2}+2(-2)\pi=\frac{9\pi}{2}-4\pi=\frac{9\pi-8\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

Donc / l'abscisses curviligne principale du point M_0 est $\alpha=\frac{\pi}{2}$

▪ $M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right)$

Methode1: On a $\frac{11\pi}{3}=\frac{12\pi-\pi}{3}=4\pi-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2\times2\pi$ et $-\frac{\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc l'abscisses curviligne principale du point M_1 est: $\alpha=-\frac{\pi}{3}$.

Methode2 : $-\pi<\frac{11\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1<\frac{11}{3}+2k\leq1$ par suite : $-1-\frac{11}{3}<-\frac{11}{3}+\frac{11}{3}+2k\leq1-\frac{11}{3}$

Donc : $-\frac{14}{3} < 2k \leq -\frac{8}{3}$ par suite : $-\frac{7}{3} < k \leq -\frac{4}{3}$

Donc : $-2,3 \simeq -\frac{7}{3} < k \leq -\frac{4}{3} \simeq -1,3$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $k = -2$ par suite : $\alpha = \frac{11\pi}{3} + 2(-2)\pi = \frac{11\pi}{3} - 4\pi = \frac{11\pi - 12\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$

Donc l'abscisse curviligne principale du point M_1 est : $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

▪ $M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right)$

Methode1: On a $\frac{67\pi}{3} = \frac{64\pi + 3\pi}{4} = \frac{64\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 16\pi + \frac{3\pi}{4} = 2\times 8\pi + \frac{3\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4} \in]-\pi ; \pi]$ donc l'abscisses curviligne principale du point M_2 est $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

Methode2: $-\pi < \frac{67\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-1 < \frac{67}{4} + 2k \leq 1$

Donc $-1 - \frac{67}{4} < -\frac{67}{4} + \frac{67}{4} + 2k \leq 1 - \frac{67}{4}$

Donc $-\frac{71}{4} < 2k \leq -\frac{63}{4}$ c'est-à-dire : $-8,8 \simeq -\frac{71}{8} < k \leq -\frac{63}{8} \simeq -7,8$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = -8$ c'est à dire : $\alpha = \frac{67\pi}{4} + 2(-8)\pi = \frac{67\pi}{4} - 16\pi = \frac{67\pi - 64\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Donc l'abscisse curviligne principale du point M_2 est $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

▪ $M_3\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

On a $\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi + \pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 6\pi + \frac{\pi}{3} = 2\times 3\pi + \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3} \in]-\pi ; \pi]$

Donc l'abscisses curviligne principale du point M_3 est : $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

• $M_4\left(\frac{181\pi}{6}\right)$

Methode1: On a $\frac{181\pi}{6} = \frac{180\pi + \pi}{6} = \frac{180\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 30\pi + \frac{\pi}{6}$.

$\frac{181\pi}{6} = 2\times 15\times \pi + \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6} \in]-\pi ; \pi]$

Donc : l'abscisse curviligne principale du point M_4 est : $\alpha = \frac{\pi}{6}$ avec $k = 15$

(Le nombre de tours effectués par le point)

Methode2: On effectue la division euclidienne de 181 par 6 on trouve : $181 = 6\times 30 + 1$ Par suite :

$\frac{181\pi}{6} = \frac{(6\times 30 + 1)\pi}{6} = \frac{6\times 30\pi + \pi}{6} = \frac{6\times 30\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\ \frac{181\pi}{6} = 30\pi + \frac{\pi}{6}$

Donc l'abscisse curviligne principale du point M_4 est $\alpha = \frac{\pi}{6}$ car $\frac{\pi}{6} \in]-\pi ; \pi]$.

Exercice3 : (**)

Placer sur un cercle trigonométrique d'origine I les points d'abscisses curvilignes x qui vérifie :

$2x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Solution : $2x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ signifie que : $x=\frac{\pi}{8}+k\pi$

Pour placer facilement ces points M_k sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principales de ces points $M_k\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)$

$\frac{\pi}{8}+k\pi\in\left]-\pi\,;\,\pi\right]$ Équivalent à : $-\pi<\frac{\pi}{8}+k\pi\leq\pi$

Équivalent à : $-1<\frac{1}{8}+k\leq1$

Équivalent à : $-1-\frac{1}{8}<k\leq1-\frac{1}{8}$

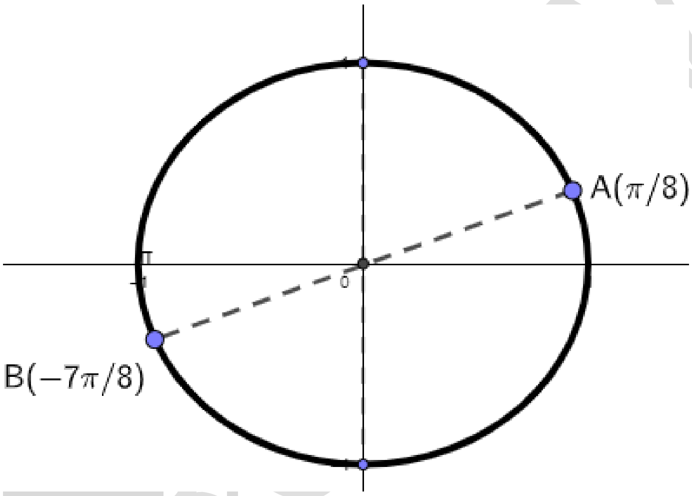
Équivalent à : $-\frac{9}{8}<k\leq\frac{7}{8}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Par suite : $k=-1$ ou $k=0$

Donc : il y a deux ponts :

Si $k=0$ alors : $A\left(\frac{\pi}{8}+0\times\pi\right)$ c'est-à-dire : $A\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Si $k=-1$ alors : $B\left(\frac{\pi}{8}-1\times\pi\right)$ c'est-à-dire : $B\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$



Exercice4: (**) **:** Dans chacun des cas suivants, déterminer si x et y sont des mesures d'un même angle orienté.

1) $x=\frac{\pi}{2}$ et $y=\frac{3\pi}{2}$ 2) $x=\frac{5\pi}{3}$ et $y=-\frac{21\pi}{4}$ 3) $x=\frac{29\pi}{3}$ et $y=\frac{-2\pi}{3}$ 4) $x=\frac{43\pi}{12}$ et $y=-\frac{5\pi}{12}$

Solution :1) $x=\frac{\pi}{2}$ et $y=\frac{3\pi}{2}$

$x-y=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}=-\pi$

Donc : x et y ne sont pas des mesures d'un même angle orienté.

2) $x=\frac{5\pi}{3}$ et $y=-\frac{21\pi}{4}$

$$x-y=\frac{5\pi}{3}+\frac{21\pi}{4}=\frac{83\pi}{12}$$

Donc : x et y ne sont pas des mesures d'un même angle orienté.

3) $x=\frac{29\pi}{3}$ et $y=\frac{-2\pi}{3}$

$$x-y=\frac{29\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\frac{31\pi}{12}$$

Donc : x et y ne sont pas des mesures d'un même angle orienté.

4) $x=\frac{43\pi}{12}$ et $y=-\frac{5\pi}{12}$

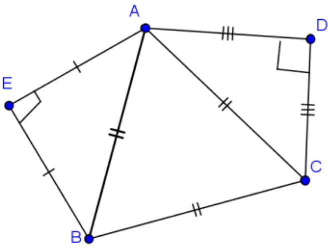
$$x-y=\frac{43\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}=\frac{48\pi}{12}=4\pi$$

Donc : x et y sont des mesures d'un même angle orienté.

Exercice5 : (**)

D'après la figure suivante donner la mesure principale des angles orientés suivant :

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}\right)$;$\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE}\right)$; $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)$; $\left(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)$



Solution : Le triangle : ACD est rectangle et isocèle en D et Le triangle : ABC est équilatérale

• La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ est $\frac{\pi}{3}$

Et on écrit : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

• La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)$ est $-\frac{\pi}{2}$

Et on écrit : $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

• On a : $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}\right)$

Donc : La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)$ est : $-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ cad $-\frac{7\pi}{12}$

• Le triangle : AEB est rectangle et isocèle en E

Donc : $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)$

Ssi $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : La mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}\right)$ est $\frac{5\pi}{6}$

• On a : $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE}\right)=\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE}\right)$

Donc : La mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE}\right)$ est : $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ cad $\frac{7\pi}{12}$

• La mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{EA}\right)$ est : $\frac{\pi}{2}$

Exercice6 : (**)

Sachant que. $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)\equiv-\frac{\pi}{7}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{w}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Déterminer la mesure principale de : $\left(\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}\right)$; $\left(-\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$ et $\left(-\overrightarrow{w};\overrightarrow{v}\right)$

Solution : $\left(\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}\right)\equiv\left(\overrightarrow{v};\overrightarrow{u}\right)+\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{w}\right)[2\pi]$

$$\equiv-\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)+\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{w}\right)[2\pi]$$

$$\equiv-\left(-\frac{\pi}{7}\right)-\frac{\pi}{4}[2\pi]\equiv\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Donc : $\left(\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}\right)\equiv-\frac{3\pi}{28}[2\pi]$

$\left(-\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)\equiv\pi+\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)[2\pi]$

$\equiv\pi-\frac{\pi}{7}[2\pi]$ Donc : $\left(-\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)\equiv\frac{6\pi}{7}[2\pi]$

$\left(-\overrightarrow{w};\overrightarrow{v}\right)\equiv\pi+\left(\overrightarrow{w};\overrightarrow{v}\right)[2\pi]$

$\equiv\pi-\left(\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}\right)[2\pi]$ $\equiv\pi+\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $\left(-\overrightarrow{w};\overrightarrow{v}\right)\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Exercice7 : (**) Soit $-\pi<x<\pi$; calculer **:**

$A=\sin\left(\frac{6\pi-x}{6}\right)+\sin\left(\frac{12\pi+2x}{12}\right)$; $B=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$;

$C=\cos\left(\frac{14\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)$

$D=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\times\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\times\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\times\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$; $E=\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\times\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\times\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$\cos\frac{10\pi}{3}$ **;** $\sin\frac{53\pi}{6}$ **;** $\cos\frac{34\pi}{3}$ **;** $\cos\frac{13\pi}{6}$ **;** $\tan\frac{37\pi}{4}$

Solution : On peut utiliser les résultats des tableaux suivants :

	$-x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$
$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
$\tan x$	$-\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{-1}{\tan x}$

x	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	**-1**
$\sin x$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	**0**

$A=\sin\left(\frac{6\pi-x}{6}\right)+\sin\left(\frac{12\pi+2x}{12}\right)=\sin\left(\pi-\frac{x}{6}\right)+\sin\left(\pi+\frac{x}{6}\right)\ A=\sin\left(\frac{x}{6}\right)-\sin\left(\frac{x}{6}\right)=0$

$B=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{3\pi+2\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right)$

$B=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$B=-\sin\frac{\pi}{3}-\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}=0$

$C=\cos\left(\frac{14\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)$

$C=\cos\left(\frac{12\pi+2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{24\pi-\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{8\pi+\pi}{2}\right)$

$C=\cos\left(4\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$C=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$C=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-2\times1=-1-2=-3$

$D=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\times\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\times\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\times\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$D=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\times\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\times\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\times\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$D=\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\times\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\times\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\times\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$D=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$D=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{16}=\frac{\sqrt{3}}{8}$

$E=\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\times\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\times\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$E=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\times\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\times\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$E=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\times-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$E=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Donc : $E=\sqrt{3}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=1$

$\cos\frac{10\pi}{3}=\cos\left(\frac{9\pi+\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{9\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$\cos\frac{10\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$\cos\frac{13\pi}{6}=\cos\left(\frac{12\pi+\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{12\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{53\pi}{6}=\sin\left(\frac{54\pi-\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{54\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(9\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(8\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\sin\frac{53\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{34\pi}{3}=\cos\left(\frac{33\pi+\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{33\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(11\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(10\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{34\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{37\pi}{4}=\tan\left(\frac{36\pi+\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{36\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(9\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

Exercice8 : (**) Simplifier les expressions suivantes :

$A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$ $\qquad B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}$

$C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ $\qquad D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$

$E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)$ $\qquad F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

Solution : On a donc : $A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$

$$A=\sin(x)\times\sin(x)-\cos x\times(-\cos x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}=\frac{\sin x+\sin x}{-\cos x}=-\frac{2\sin x}{\cos x}=-2\tan x$$

$$C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)$$

$$C=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$C=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{3\sqrt{3}}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2\sqrt{3}}{6}$$

Donc : $C=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$

$$D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$$

$$D=\sin(10\pi+\pi-x)+\cos(4\pi+\pi+x)+\cos(2\times7\pi-x)$$

$$D=\sin(\pi-x)+\cos(\pi+x)+\cos(-x)$$

$$D=\sin(x)-\cos(x)+\cos(x)=\sin(x)$$

$$E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)=-\tan(x)+\tan(x)=0$$

$$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

On a $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{2\pi}{10}+\frac{3\pi}{10}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ donc : $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$

$$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$$

Exercice9 : (**) Simplifier et calculer les expressions suivantes :

$$A=\cos(0)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right)+\cos(\pi)$$

$$D=\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

Solution : $A=1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-1=1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0-\frac{\sqrt{2}}{2}-1=0$

$$D=\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

On a : $\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\tan\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)$

Donc : $\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)=-\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Donc : $D=\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)-\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)=0$

Exercice10 : (**) 1) Sachant que : $\cos x=-\frac{3}{4}$ et $-\pi<x<0$; calculer : $\sin x$ et $\tan x$

Solution : On a : $\cos x=-\frac{3}{4}$ et on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ c'est à dire : $\sin^2 x=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2$ c'est à dire : $\sin^2 x=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$

Donc : $\sin^2 x=\frac{7}{16}$ par suite : $\sin x=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ou $\sin x=-\sqrt{\frac{7}{16}}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$

Or $-\pi<x<0$ donc : $\sin x<0$ donc : $\sin x=-\frac{\sqrt{7}}{4}$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Exercice11 : (**) On considère un réel x tel que : $\sin x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

1) Déterminer la valeur exacte de $\cos x$

2) On sait que : $x\in\left\{-\frac{5\pi}{12};-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}\right\}$ déterminer la valeur exacte de x

Solution :1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ donc $\cos^2 x=1-\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2=1-\frac{2-2\sqrt{12}+6}{16}$

$\cos^2 x=\frac{16-\left(8-2\sqrt{12}\right)}{16}=\frac{8+2\sqrt{12}}{16}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{16}$ C'est-à-dire : $\cos^2 x=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$

Donc : $\cos x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Or comme $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos x$ est positif et par suite : $\cos x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

2) on a $\sin x < 0$ car : $\sqrt{2} \prec \sqrt{6}$

Donc $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ et de plus $|\cos x| = \left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right| \succ |\sin x| = \left|\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right|$

Donc : $-\frac{\pi}{4} < x \leq 0$ et finalement : $x = -\frac{\pi}{12}$

Exercice12 : (**) Soit $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ On pose : $E = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos^3 x$

1) Montrer que : $E = \left(2-\cos^2 x\right)^2$

2) Déterminer la valeur de E sachant que : $\tan x = \sqrt{7}$

Solution : 1) $E = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos^3 x$ et on a : $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$

Donc : $E = 4\sin x \sin x + \cos x \cos^3 x$

Donc : $E = 4\sin^2 x + \cos^4 x$

Donc : $E = 4\left(1-\cos^2 x\right) + \cos^4 x$ car on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ c'est à dire **:** $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$

Donc : $E = 4 - 4\cos^2 x + \cos^4 x$

Donc : $E = \left(\cos^2 x\right)^2 - 2\cos^2 x \times 2 + 2^2$

Donc : $E = \left(\cos^2 x - 2\right)^2 = \left(2-\cos^2 x\right)^2$

2) Déterminons la valeur de E sachant que : $\tan x = \sqrt{7}$

On sait que : $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ c'est-à-dire : $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$

Donc : $\cos^2 x = \frac{1}{1+\sqrt{7}^2} = \frac{1}{1+7} = \frac{1}{8}$

Par suite : $E = \left(2-\cos^2 x\right)^2 = \left(2-\frac{1}{8}\right)^2 = \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{64}$

Exercice13 : (**) On pose : $A(x) = \sin x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$

1) Calculer : $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $A\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $A\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

2) Montrer que : si $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ alors : $A\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = A\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

Solution :1) $A\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

$A\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = A\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$

$A\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

2) Montrons que : si $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ alors : $A\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = A\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$?

$A\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$

Donc : $A\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)$

$$A\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)$$

Donc : $A\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)$ Par suite : $A\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=A\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

Exercice14 : (***) On considère un entier relatif n (il peut être positif ou négatif).
Déterminer éventuellement en fonction de n, le cosinus et le sinus des réels :

$2n\pi$; $(2n+1)\pi$; $n\pi$; $-\frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi$

Solution :1) $\cos(2n\pi)=\cos(2\pi n)=\cos(2\pi n+0)=\cos(0)=1$

$\sin(2n\pi)=\sin(2\pi n)=\sin(2\pi n+0)=\sin(0)=0$

$\cos((2n+1)\pi)=\cos(2\pi n+\pi)=\cos(2\pi n+\pi)=\cos(\pi)=-1$

$\sin((2n+1)\pi)=\sin(2\pi n+\pi)=\sin(2\pi n+\pi)=\sin(\pi)=0$

$\begin{cases}\cos(n\pi)=1..\text{si}..n..pair\\ \cos(n\pi)=-1..\text{si}..n..impair\end{cases}$ à l'aide des deux calculs précédents et $\sin(n\pi)=0$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi+\pi\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

Exercice15 : (**) Montrer que : pour tout $x\in\mathbb{R}$

1) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

2) $(1+\sin x+\cos x)^2=2(1+\sin x)(1+\cos x)$

Solution:

1)On a: $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x$

Donc : $\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x\right)^2+2\sin^2 x\cos^2 x+\left(\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

Donc : $\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

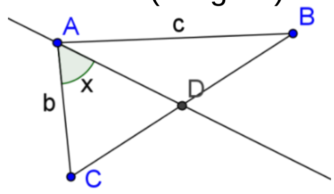
Donc : $\sin^4 x+\cos^4 x=(1)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

Donc : $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

2) $(1+\sin x+\cos x)^2=1+\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x+2\cos x+2\sin x\cos x$

$$\begin{aligned}&=1+1+2\sin x+2\cos x+2\sin x\cos x\\&=2+2\sin x+2\cos x+2\sin x\cos x\\&=2(1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x)\\&=2((1+\sin x)+\cos x(1+\sin x))\\&=2(1+\sin x)(1+\cos x)\end{aligned}$$

Exercice16 : (**) Soit (AD) une médiane du triangle ABC tel que : $BAD=x$ (la figure)
Et $AC=b$ et $BC=a$ et $AB=c$



Montrer que : $\sin(A-x)=\frac{c}{b}\sin x$

Solution : On a : $x+BDA+B=\pi$ et $A+B+C=\pi$

Donc : $x+BDA+B=A+B+C$ c'est-à-dire : $BDA=A+C-x$

D'après la loi des sinus dans le triangle ABD on a : $\dfrac{\sin\left(A+C-x\right)}{c}=\dfrac{\sin\left(x\right)}{\frac{a}{2}}\left(1\right)$

D'après la loi des sinus dans le triangle ADC on a : $\dfrac{b}{\sin\left(\pi-BDA\right)}=\dfrac{\frac{a}{2}}{\sin\left(A-x\right)}$ c'est-à-dire :

$$\frac{b}{\sin BDA}=\frac{\frac{a}{2}}{\sin\left(A-x\right)}$$

Donc : $\sin\left(A-x\right)=\dfrac{a}{2b}\sin\left(A+C-x\right)\left(2\right)$

De $\left(1\right)$ et $\left(2\right)$ en déduit que : $\sin\left(A-x\right)=\dfrac{c}{b}\sin x$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien