Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°4 :

Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1

Exercice1: (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $(3x+1)(5x-2)-9x^2+1=0$ 2) $x^3+1+2\left(x^2-1\right)-3x-3=0$ 3) $\dfrac{\sqrt{3}x-1}{x-2}=\dfrac{3x-3}{\sqrt{3}x-3}$

Corrigé : 1) $(3x+1)(5x-2)-9x^2+1=0$ équivaut à : $(3x+1)(5x-2)-\left(9x^2-1\right)=0$

Équivaut à : $(3x+1)(5x-2)-(3x-1)(3x+1)=0$

Équivaut à : $(3x+1)\left[(5x-2)-(3x-1)\right]=0$

Équivaut à : $(3x+1)(5x-2-3x+1)=0$

Équivaut à : $(3x+1)(2x-1)=0$

Équivaut à : $3x+1=0$ ou $2x-1=0$

Équivaut à : $x=-\dfrac{1}{3}$ ou $x=\dfrac{1}{2}$ d''où : $S=\left\{-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right\}$

2) $x^3+1+2\left(x^2-1\right)+x+1=0$ équivaut à : $x^3+1^3+2\left(x^2-1^2\right)+(x+1)=0$

Équivaut à : $(x+1)\left(x^2-x+1\right)+2(x+1)(x-1)+1(x+1)=0$ car : $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

Équivaut à : $(x+1)\left[\left(x^2-x+1\right)+2(x-1)+1\right]=0$

Équivaut à : $(x+1)\left(x^2-x+1+2x-2+1\right)=0$ c'est-à-dire : $(x+1)\left(x^2+x\right)=0$

Équivaut à : $x(x+1)(x+1)=0$

Équivaut à : $x(x+1)^2=0$

Équivaut à : $x=0$ ou $x+1=0$

Équivaut à : $x=0$ ou $x=-1$ d''où : $S=\{-1;0\}$

3) $\dfrac{\sqrt{3}x-1}{x-2}=\dfrac{3x-3}{\sqrt{3}x-3}$

Cette équation n'existe pas si $x-2=0$ et si $\sqrt{3}x-3=0$

$x-2=0$ Équivaut à : $x=2$

$\sqrt{3}x-3=0$ Équivaut à : $x=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

Les valeurs interdites de cette équation sont 2 et $\sqrt{3}$. L'équation est donc définie sur $D_E=\mathbb{R}\backslash\{2;\sqrt{3}\}$.

$\dfrac{\sqrt{3}x-1}{x-2}=\dfrac{3x-3}{\sqrt{3}x-3}$ Équivaut à : $\left(\sqrt{3}x-1\right)\left(\sqrt{3}x-3\right)=(3x-3)(x-2)$

Équivaut à : $3x^2-3\sqrt{3}x-\sqrt{3}x+3=3x^2-6x-3x+6$

Équivaut à : $-4\sqrt{3}x+9x=3$ Équivaut à : $\left(-4\sqrt{3}+9\right)x=3$

Équivaut à : $x=\dfrac{3}{9-4\sqrt{3}}=\dfrac{3\left(9+4\sqrt{3}\right)}{\left(9-4\sqrt{3}\right)\left(9+4\sqrt{3}\right)}=\dfrac{3\left(9+4\sqrt{3}\right)}{81-48}=\dfrac{9+4\sqrt{3}}{11}\in D_E$

D'où : $S=\left\{\dfrac{9+4\sqrt{3}}{11}\right\}$

Exercice2: (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\frac{3x+5}{x-1}=0$ b) $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4}=0$ c) $\frac{x^2-9}{x+3}=0$ d) $1-\frac{x+3}{x-3}=\frac{2}{2-x}$

Corrigé : a) L'équation n'est pas définie pour $x = 1$.

Pour $x \neq 1$, l'équation $\frac{3x+5}{x-1}=0$ équivaut à : $3x+5=0$

D'où : $x=-\frac{5}{3}$ c a d : $S=\{-5/3\}$

b) L'équation n'est pas définie pour $x = 4$.

Pour $x \neq 4$, l'équation $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4}=0$ équivaut à :

$(2x+1)(x-3)=0$ Soit : $2x+1=0$ ou $x-3=0$

Les Solutions sont : $x=-\frac{1}{2}$ et $x=3$ c'est-à-dire : $S=\{-1/2;3\}$

c) L'équation n'est pas définie pour $x = -3$.

Pour $x \neq -3$, l'équation $\frac{x^2-9}{x+3}=0$ équivaut à : $x^2-9=0$, soit $x^2=9$

Soit encore : $x=3$ ou $x=-3$.

Comme $x \neq -3$, l'équation a pour unique Solution : $x=3$ c'est-à-dire : $S=\{3\}$

d) L'équation n'est pas définie pour $x = 2$ et $x = 3$.

Pour $x \neq 2$ et $x \neq 3$, l'équation : $1-\frac{x+3}{x-3}=\frac{2}{2-x}$ équivaut à $1-\frac{x+3}{x-3}-\frac{2}{2-x}=0$

On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient :

$$\frac{(x-3)(2-x)}{(x-3)(2-x)}-\frac{(x+3)(2-x)}{(x-3)(2-x)}-\frac{2(x-3)}{(x-3)(2-x)}=0$$

$$\frac{(x-3)(2-x)-(x+3)(2-x)-2(x-3)}{(x-3)(2-x)}=0$$ On développe : $$\frac{2x-x^2-6+3x-2x+x^2-6+3x-2x+6}{(x-3)(2-x)}=0$$

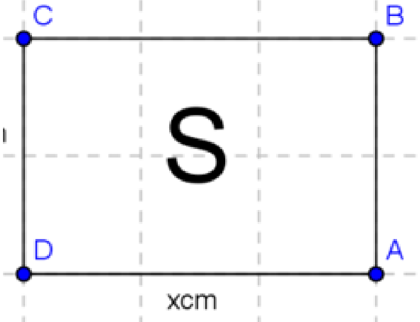
$\frac{4x-6}{(x-3)(2-x)}=0$ Ce qui équivaut à : $4x-6=0$ et $(x-3)(2-x)\neq 0$

D'où : $x=\frac{3}{2}$. C'est-à-dire : $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

Exercice3 : (***) Quelle est la longueur d'un rectangle sachant que sa largeur est 8cm et sa surface vaut le triple de son périmètre **?**

Corrigé : Soit S La surface du rectangle *ABCD*

Et P Le périmètre du rectangle *ABCD*



Soit x La longueur du rectangle

On a donc : $S=8x$ et $P=2(8+x)=16+2x$

$S=3P$ Signifie $8x=3(16+2x)$

Signifie $8x = 48 + 6x$ c'est-à-dire : $2x = 48$

Signifie $x = \frac{48}{2} = 24cm$

Exercice4 : (**)

1) Résoudre les équations : a) $|5x+2| = 8$ b) $|-2x+1| = -1$ c) $|2x+1| = |3x-4|$

2) Résoudre les inéquations : a) $|2x-3| \leq 1$ b) $|6x+11| \geq \frac{1}{6}$ c) $2 \leq |10x+2| \leq 5$

Corrigé : 1) a) Résolution de l'équation : $|5x+2| = 8$

On a les équivalences suivantes :

$|5x+2| = 8$ Signifie que : $5x+2 = 8$ ou $5x+2 = -8$

Signifie que : $5x = 6$ ou $5x = -10$

Signifie que : $x = \frac{6}{5}$ ou $x = -2$

Donc : $S = \left\{-2; \frac{6}{5}\right\}$

b) Résolution de l'équation : $|-2x+1| = -1$

Une valeur absolue ne peut pas être strictement négative
Donc : $S = \varnothing$

c) Résolution de l'équation : $|2x+1| = |3x-4|$

Égalité de deux valeurs absolues :
<u>Règle :</u> L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b
Cela découle du fait que par exemple |5| = |−5|

$|2x+1| = |3x-4|$ Signifie que : $2x+1 = 3x-4$ ou $2x+1 = -(3x-4)$

Signifie que : $-x = -5$ ou $2x+1 = -3x+4$
Signifie que : $x = 5$ ou $5x = 3$
Signifie que : $x = 5$ ou $x = \frac{3}{5}$

Donc : $S = \left\{\frac{3}{5}; 5\right\}$

2)a) Résolution de l'inéquation : $|2x-3| \leq 1$

Règle : $|x-a| \leq r$ **est équivalente à :** $-r \leq x-a \leq r$ avec $r > 0$

D'après notre règle, on a donc :

$|2x-3| \leq 1$ Signifie que : $-1 \leq 2x-3 \leq 1$

Signifie que : $-1+3 \leq 2x-3+3 \leq 1+3$
Signifie que : $2 \leq 2x \leq 4$
Signifie que : $1 \leq x \leq 2$
Donc : $S = [1; 2]$

b) Résolution de l'inéquation : $|6x+11| \geq \frac{1}{6}$

Règle : $|x-a| > r$ **est équivalente à :** $x-a \geq r$ ou $x-a \leq -r$ avec $r > 0$

$|6x+11| \geq \frac{1}{6}$ Signifie que : $6x+11 \geq \frac{1}{6}$ ou $6x+11 \leq -\frac{1}{6}$

Signifie que : $6x \geq \frac{1}{6} - 11$ ou $6x \leq -\frac{1}{6} - 11$

Signifie que : $6x \geq -\frac{65}{6}$ ou $6x \leq -\frac{67}{6}$

Signifie que : $x \geq -\frac{65}{36}$ ou $x \leq -\frac{67}{36}$

Donc : $S = \left]-\infty; -\frac{67}{36}\right] \cup \left[-\frac{65}{36}; +\infty\right[$

c) Résolution de l'inéquation : $2 \leq |10x+2| \leq 5$

$2 \leq |10x+2| \leq 5$ Signifie que : $|10x+2| \leq 5$ et $|10x+2| \geq 2$

• Résolution de l'inéquation : $|10x+2| \leq 5$

$|10x+2| \leq 5$ Signifie que : $-5 \leq 10x+2 \leq 5$

Signifie que : $-5-2 \leq 10x+2-2 \leq 5-2$

Signifie que : $-7 \leq 10x \leq 3$

Signifie que : $-\frac{7}{10} \leq x \leq \frac{3}{10}$

Donc : $S_1 = \left[-\frac{7}{10}; \frac{3}{10}\right]$

• Résolution de l'inéquation : $|10x+2| \geq 2$

$|10x+2| \geq 2$ Signifie que : $10x+2 \geq 2$ ou $10x+2 \leq -2$

Signifie que : $10x \geq 0$ ou $10x \leq -4$

Signifie que : $x \geq 0$ ou $x \leq -\frac{2}{5}$

Donc : $S_2 = \left]-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup [0; +\infty[$

Finalement on a : $S = S_1 \cap S_2 = \left[-\frac{7}{10}; \frac{3}{10}\right] \cap \left(\left]-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup [0; +\infty[\right)$

Donc : $S = S_1 \cap S_2 = \left[-\frac{7}{10}; \frac{3}{10}\right] \cap \left(\left]-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup [0; +\infty[\right)$

Donc : $S = \left[-\frac{7}{10}; -\frac{2}{5}\right] \cup \left[0; \frac{3}{10}\right]$

Exercice5 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ algébriquement l'inéquation : $|x-2| \leq 5$

2)Résoudre Graphiquement l'inéquation : $|x-2| \leq 5$

Corrigé :

1) **Résolvons notre équation algébriquement :**

Règle : $|x-a| \leq r$ est équivalente à : $-r \leq x-a \leq r$ avec $r > 0$

D'après notre règle, on a donc :

$|x-2| \leq 5$ Signifie que : $-5 \leq x-2 \leq 5$

Signifie que : $-5+2 \leq x-2+2 \leq 5+2$

Signifie que : $-3 \leq x \leq 7$

Donc : $S = [-3; 7]$

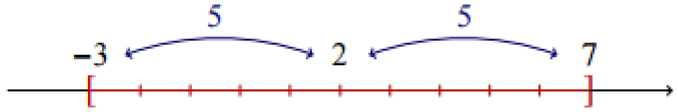
2) **Résolvons notre inéquation Graphiquement :**

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la distance de x à 2 est égale à 5.

Visualisons ce problème sur la droite des réels.

Graphiquement Cela revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles la distance de x à 2 est inférieure ou égale à 5.

Visualisons les solutions sur la droite des réels :



On obtient alors l'intervalle [−3 ; 7] ; avec que 2 est le centre et 5 le rayon de l'intervalle.

Donc : $S = [-3;7]$

Exercice6 : (***) Résoudre l'inéquation suivante : $|2x-1|+3|x-2| \succ 4$

Corrigé : $x-2=0$ Signifie que : $x=2$

$2x-1=0$ Signifie que : $x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\|2x-1\|$		$-2x+1$	0	$2x-1$		$2x-1$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\|x-2\|$		$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$	
$\|2x-1\|+3\|x-2\|$		$7-5x$		$-x+5$		$5x-7$	

Si : $x \le \frac{1}{2}$ alors : $|2x-1|+3|x-2| \succ 4$

Devient : $-(2x-1)-3(x-2)-4 \succ 0$

Ce qui signifie que : $-5x+3 \succ 0$

C'est-à-dire : $x \prec \frac{3}{5}$

Donc : $S_1 = \left]-\infty;\frac{3}{5}\right[\cap \left]-\infty;\frac{1}{2}\right] = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$

Si : $\frac{1}{2} \le x \le 2$ alors l'inéquation devient : $(2x-1)-3(x-2)-4 \succ 0$

Ce qui Signifie que : $-x+1 \succ 0$ c'est-à-dire : $x \prec 1$

Donc : $S_2 = \left[\frac{1}{2};2\right] \cap \left]-\infty;1\right] = \left[\frac{1}{2};1\right[$

Si : $x \ge 2$ alors l'inéquation devient $(2x-1)+3(x-2)-4 \succ 0$

Ce qui Signifie que : $5x-11 \succ 0$ ce qui Signifie que : $x \succ \frac{11}{5}$

Donc : $S_3 = \left]\frac{11}{5};+\infty\right[\cap [2;+\infty[= \left]\frac{11}{5};+\infty\right[$

Par conséquent : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2};1\right[\cup \left]\frac{11}{5};+\infty\right[$

Ce qui Signifie que $S = [-\infty;1[\cup \left]\frac{11}{5};+\infty\right[$

Exercice7 : (***) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre m les équations suivantes :

$\frac{x-4}{x+m} = m$

Corrigé :) $\frac{x-4}{x+m}=m$

a) L'équation est définie si $x+m\neq 0$. c'est-à-dire : $x\neq -m$

On va écrire cette équation sous la forme : $ax+b=0$

$\frac{x-4}{x+m}=m$ Équivalent à : $x-4=m(x+m)$

Équivalent à : $x-4-m(x+m)=0$ Équivalent à : $x(1-m)-4-m^2=0$

1ére cas : $1-m=0$ c'est à dire : $m=1$

L'équation devient : $0-5=0$ ce qui est impossible

Par suite : $S=\varnothing$

2ére cas : $1-m\neq 0$ c'est à dire : $m\neq 1$

$x(1-m)-4-m^2=0$ Équivalent à : $x(1-m)=4+m^2$

Donc : L'équation admet une solution unique : $x=\frac{4+m^2}{1-m}$ si $x\neq -m$

Cherchons : m tel que : $-m=\frac{4+m^2}{1-m}$?

$-m=\frac{4+m^2}{1-m}$ Équivalent à : $-m(1-m)=4+m^2$

Équivalent à : $m^2-m=3+m^2$ c'est-à-dire : $m=-3$

Donc si : $m=-3$ l'équation n'admet pas de solutions par suite : $S=\varnothing$

Mais si : $m\neq 1$ et $m\neq -3$: L'équation admet une solution unique : $x=\frac{4+m^2}{1-m}$ par suite :

Exercice8 : (*) Etudier le signe des expressions suivante :

1) $2x-10$ 2) $-3x+9$ 3) $I(x)=(x+2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x-2)$

Corrigé : 1) $2x-10=0$ Equivaut à : $x=5$

x	$-\infty$ 5 $+\infty$
$2x-10$	$-$ 0 $+$

- Si : $x\in]5,+\infty[$ alors : $-3x+9>0$
- Si : $x\in]-\infty,5[$ alors : $-3x+9<0$
- Si : $x=5$ alors : $-3x+9=0$

2) $-3x+9=0$ Equivaut à : $x=3$

x	$-\infty$ 3 $+\infty$
$-3x+9$	$+$ 0 $-$

- Si : $x\in]3,+\infty[$ alors : $-3x+9<0$
- Si : $x\in]-\infty,3[$ alors : $-3x+9>0$
- Si : $x=3$ alors : $-3x+9=0$

3) $I(x)=(x+2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x-2)$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $x+\sqrt{3}=0$ signifie que : $x=-\sqrt{3}$

$x-\sqrt{3}=0$ Signifie que : $x=\sqrt{3}$ et $x-2=0$ Équivaut à : $x=2$

On peut donc dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$	-2		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$
$x+\sqrt{3}$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
$x-\sqrt{3}$	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-2$	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
$I(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$I(x)\geq 0$ Équivaut à : $x\in\left]-\infty,-2\right]\cup\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]\cup\left[2;+\infty\right[$

$I(x)<0$ Équivaut à : $x\in\left]-2,-\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},2\right[$

Exercice9 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $(x-5)(x-2)<(x-5)(2x-3)$

2) $(3x-2)^2>(x-1)^2$

3) $\dfrac{3x-2}{x+5}\geq 0$

4) $\dfrac{4}{x+1}\leq 3$

Corrigé : 1) L'inéquation n'est pas de 1er degré et le second terme de l'inéquation n'est pas nul. Il faut pouvoir revenir à une forme factorisée avec un second terme nul.
On annule le second terme. L'inéquation devient alors :

$(x-5)(x-2)<(x-5)(2x-3)$ Equivaut à : $(x-5)(x-2)-(x-5)(2x-3)<0$

On factorise par : $(x-5)$

Equivaut à : $(x-5)\left[(x-2)-(2x-3)\right]<0$

Equivaut à : $(x-5)(x-2-2x+3)<0$

Equivaut à : $(x-5)(-x+1)<0$

Nous sommes revenus à la forme factorisée.
On remplit alors un tableau de signes en ayant pris soin auparavant de calculer les valeurs frontières
$x-5=0$ Equivaut à : $x=5$
$-x+1=0$ Equivaut à : $x=1$
On a le tableau de signes :

x	$-\infty$	1		5	$+\infty$
$x-5$	$-$	|	$-$	0	$+$
$-x+1$	$+$	0	$-$	|	$-$
$(x-5)(-x+1)$	$-$	0	$+$	0	$-$

En conclusion pour que le produit soit strictement négatif, nous avons deux possibilités : $x<1$ ou $x>5$

La solution est donc : $S=\left]-\infty,1\right[\cup\left]5,+\infty\right[$

2) $(3x-2)^2>(x-1)^2$

Remarque : On pourrait être tenté de supprimer les carrés de chaque côté de la relation d'ordre, c'est à dire d'écrire : $3x-2>x-1$. On obtiendrait une partie de la solution, mais pas toute la solution.
En supprimant les carrés, on change l'énoncé.
On procédera donc de la même manière que l'exemple précédent. :

$(3x-2)^2>(x-1)^2$ Equivaut à : $(3x-2)^2-(x-1)^2>0$

Equivaut à : $\left[(3x-2)-(x-1)\right]\left[(3x-2)+(x-1)\right]>0$

Equivaut à : $(3x-2-x+1)(3x-2+x-1)>0$

Equivaut à : $(2x-1)(4x-3)>0$

Nous sommes revenus à la forme factorisée.
On remplit alors un tableau de signes en ayant pris soin auparavant de calculer les valeurs frontières

$2x-1=0$ Equivaut à : $x=\frac{1}{2}$

$4x-3=0$ Equivaut à : $x=\frac{3}{4}$

On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$4x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(2x-1)(4x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3) $\frac{8-2x}{x+5}\geq 0$; Avant de commencer à résoudre, il faut déterminer l'ensemble de définition, c'est à dire des valeurs de x pour lesquelles le quotient existe. Cela revient à déterminer la ou les valeurs interdites, c'est à dire les valeurs de x qui annulent le dénominateur.
a) Valeur interdite ou ensemble de définition de cette inéquation :
Le dénominateur est nul si : $x+5=0$ Equivaut à : $x=-5$

On a donc définition de cette inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\{-5\}$

Le signe du quotient sur l'ensemble de définition est le même que celui du produit. On cherche donc les valeurs frontières.
$x+5=0$ Equivaut à : $x=-5$
$8-2x=0$ Equivaut à : $x=4$

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
$8-2x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{8-2x}{x+5}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

En conclusion pour que le quotient soit positif ou nul, on a donc : $-5<x\leq 4$

La solution est Donc : $S=\left]-5;4\right]$

4) $\frac{4}{x+1}\leq 3$; Avant de commencer à résoudre, il faut déterminer l'ensemble de définition, c'est à dire des valeurs de x pour lesquelles le quotient existe. Cela revient à déterminer la ou les valeurs interdites, c'est à dire les valeurs de x qui annulent le dénominateur.
a) Valeur interdite ou ensemble de définition de cette inéquation :
Le dénominateur est nul si : $x+1=0$ Equivaut à : $x=-1$

On a donc définition de cette inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\{-1\}$

On annule le second terme et on réduit au même dénominateur :

$\frac{4}{x+1}\leq 3$ Equivaut à : $\frac{4}{x+1}-3\leq 0$ Equivaut à : $\frac{4-3x-3}{x+1}\leq 0$ Equivaut à : $\frac{-3x+1}{x+1}\leq 0$

On cherche les valeurs frontières :

$-3x+1=0$ Equivaut à : $x=\frac{1}{3}$

$x+1=0$ Equivaut à : $x=-1$

On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x+1$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{-3x+1}{x+1}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

En conclusion pour que le quotient soit négatif ou nul, on a donc : $x<-1$ ou $x\geq\frac{1}{3}$

La solution est donc : $S=\left]-\infty,-1\right[\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$

Exercice10 : (***) Deux opérateurs téléphoniques proposent les tarifs suivants : 0,16 DH la minute avec un abonnement de 12 DH pour le premier et 0,28 DH sans abonnement pour le second. Pour quelles durées de communication le premier opérateur est-il plus avantageux ?

Corrigé : Soit x la durée du temps de communication.

Avec le premier opérateur, le tarif est : $f(x)=0{,}16x+12$

Avec le deuxième opérateur, le tarif est : $g(x)=0{,}28x$

Le premier opérateur est plus intéressant si : $f(x)<g(x)$

Soit : $0{,}16x+12<0{,}28x \Leftrightarrow 12<0{,}12x \Leftrightarrow \frac{12}{0{,}12}<x \Leftrightarrow 100<x$

Exercice11 : (***) Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1) $\frac{4x-2}{3x+6}\geq 0$ 2) $\frac{(2x+1)(1-x)}{x^2-4}\geq 0$ 3) $\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}\geq 0$

Corrigé : 1) $\frac{5x-2}{3x+6}\geq 0$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :

Cette inéquation est définie si et seulement si : $3x+6\neq 0$ qui signifie que : $x\neq -2$

Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\{-2\}$

b) Résolvons l'inéquation: $4x-2=0$ Signifie $x=\frac{1}{2}$

Donc le tableau des Signes est:

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{4x-2}{3x+6}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty;-2\right[\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

2) $\frac{(2x+1)(1-x)}{x^2-4}\geq 0$ Signifie que $\frac{(2x+1)(1-x)}{(x+2)(x-2)}\geq 0$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :

Cette inéquation est définie si et seulement si $x^2-4\neq 0$ qui signifie que : $x\neq 2$ ou $x\neq -2$

Donc : le domaine de définition de l’inéquation est : $D_I = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

b) Résolvons l’inéquation : $1 - x = 0$ Signifie que : $x = 1$

$2x + 1 = 0$ Signifie que: $x = \frac{-1}{2}$

Donc le tableau des Signes est :

x	$-\infty$		-2		$\frac{-1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{(2x+1)(1-x)}{x^2-4}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Par suite : $S = \left]-2; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; 2[$

3) $\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1} \geq 0$ Signifie que : $\frac{(3x+1)(2-x)}{(2x+1)(2x-1)} \geq 0$

a) On va déterminer le domaine de définition de l’inéquation :

Cette inéquation est définie si et seulement si $4x^2 - 1 \neq 0$ qui signifie que : $x \neq \frac{1}{2}$ ou $x \neq -\frac{1}{2}$

Donc : le domaine de définition de l’inéquation : est : $D_I = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

b) Résolvons l’inéquation : $2 - x = 0$ Signifie que : $x = 2$

$3x + 1 = 0$ Signifie que : $x = \frac{-1}{3}$ D’où le tableau des Signes est:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$3x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Par suite : $S = \left]-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{2}; 2\right]$

Exercice12 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes :

1) $2x - y + 1 = 0$ 2) $2x - 6 = 4y + 8$

Corrigé : 1) On a $2x - y + 1 = 0$ équivalent à : $-y = -(2x+1)$

Équivalent à : $y = 2x + 1$

Donc : $S = \{(x; 2x+1) / x \in \mathbb{R}\}$

2) On a $2x - 6 = 4y + 8$ équivalent à : $2x - 4y - 8 - 6 = 0$

Équivalent à : $2x - 4y - 14 = 0$

Équivalent à : $2(x-2y-7)=0$

Équivalent à : $x-2y-7=0$

Équivalent à : $x=2y+7$

Donc : $S=\{(2y+7;y)/\ y\in\mathbb{R}\}$

Exercice13 : (**) Résoudre Dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation : $5x-2y-1\leq 0$

Corrigé : De l'inéquation précédente on en déduit : l'équation de la droite (D) : $5x-2y-1=0$

Cette droite passe par les points $A(1;2)$ et $B(-1;-3)$ et détermine deux demi-plans P_1 et P_2

(Il nous reste à trouver lequel des deux demis plans qui est la Solution de l'inéquation.)

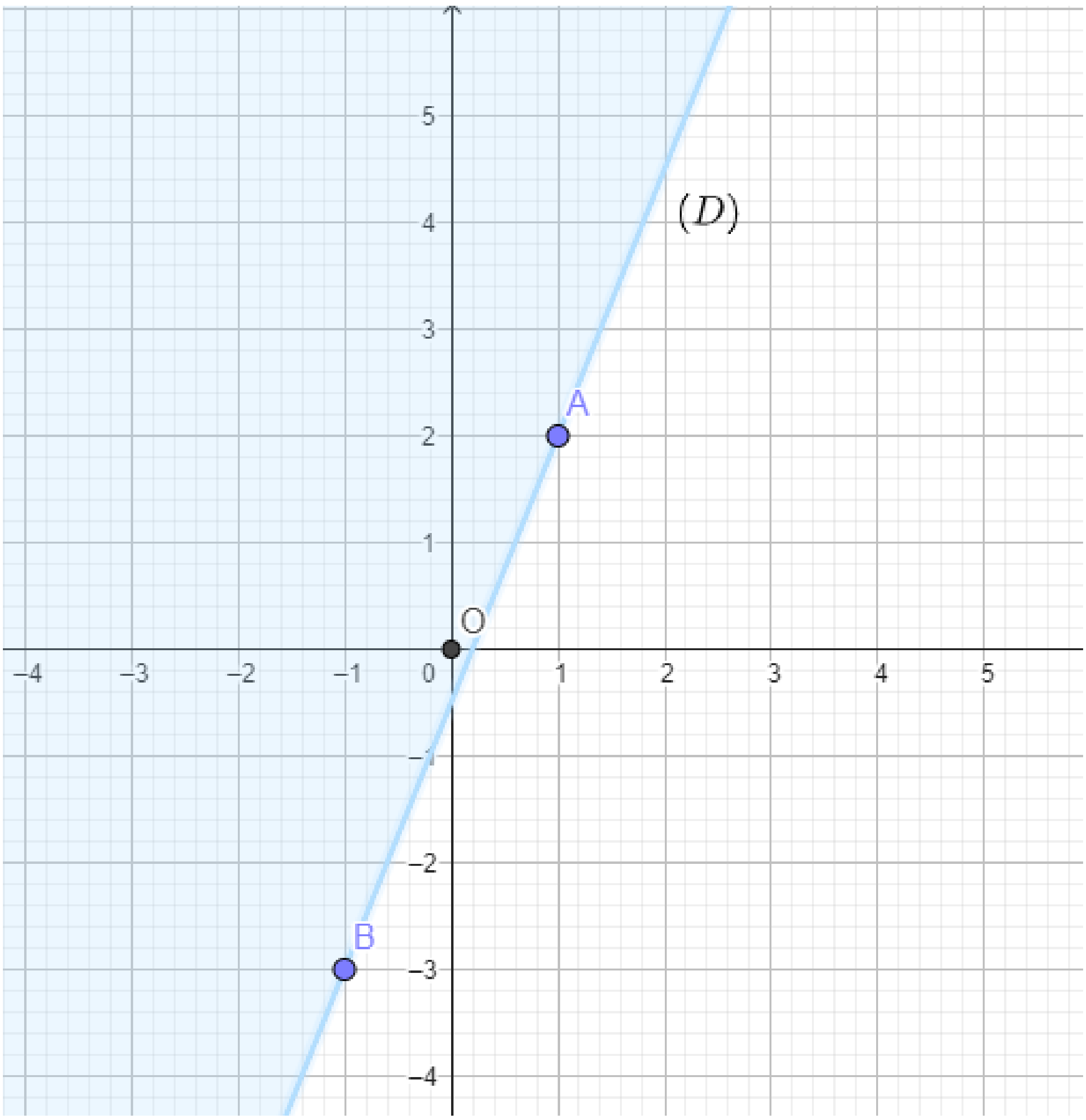
(Nous choisissons un point pris dans l'un des demi-plans, relevons ses coordonnées et nous contrôlons si ce point vérifie l'inéquation.

Conseil : On choisit, de référence, le point « O » de coordonnées (0 ; 0) ; c'est-à-dire x= 0 et y = 0 . Les calculs sont donc simplifiés. (Si la droite passe par « O », on prendra un autre point…)

Soit $O(0;0)$ On a $5\times 0-2\times 0-1=-1\leq 0$

Donc : les coordonnes (0 ; 0) vérifie l'inéquation.

Donc les Solutions de l'inéquation $2x-y+3\geq 0$ est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du demi- plan P_1 colorée en bleu qui contient la droite (D) et contient le point $O(0;0)$.



Exercice14 : (**) Résoudre Dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inéquations suivant : $(S)\ \begin{cases} 5x+y+1\geq 0 \\ -3x+y-2\leq 0 \end{cases}$

Corrigé : L'équation de la droite (D_1): $5x+y+1=0$

L'équation de la droite (D_2): $-3x+y-2=0$

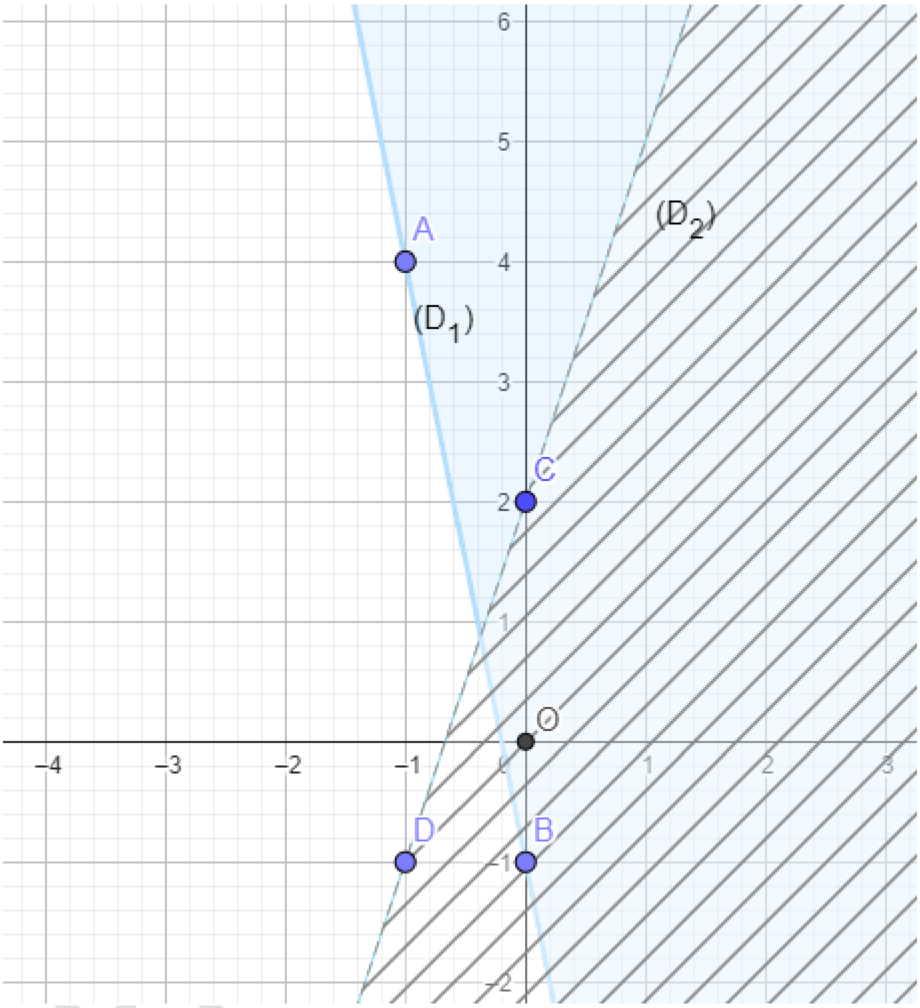
Soit $O(0;0)$ On a $0+0+1\geq 0$ équivalent à : $1\geq 0$

Donc : les coordonnes $O(0;0)$ vérifie l'inéquation. $5x+y+1\geq 0$

Pour $O(0;0)$: On a $0+0-2\leq 0$ Équivalent à : $-2\leq 0$

Donc : les coordonnes $O(0;0)$ vérifie l'inéquation. $-3x+y-2\leq 0$

Donc les Solutions du système est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du plan coloré en bleu et hachurés



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien