Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°4 :

Equations et inéquations et systèmes partie3 : Equation du second degré

Exercice1 : (*) et (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :1) $4x^2-5(x+1)=-5x+4$

2) $-(6x+1)^2-2=\frac{1}{2}$ 3) $2(x-1)-(2x-1)^2=2x-18$ 4) $100x^4-x^2=0$

5) $x^2-5x+6=0$ (on peut utiliser l'écriture canonique). 6) $2(1-x)+x^2=2x-1$

Solution :1) L'équation : $4x^2-5(x+1)=-5x+4$

$4x^2-5(x+1)=-5x+4$ Signifie que : $4x^2-5x-5=-5x+4$ Signifie que : $4x^2=9$

Signifie que : $4x^2=9$ Signifie que : $x^2=\frac{9}{4}$

$\frac{9}{4}$: est positif donc l'équation admet deux solutions : $x=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$ et. $x=-\sqrt{\frac{9}{4}}=-\frac{3}{2}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

2) L'équation : $-(6x+1)^2-2=\frac{1}{2}$

$-(6x+1)^2-2=\frac{1}{2}$ Signifie que : $-(6x+1)^2=\frac{1}{2}+2$

Signifie que : $-(6x+1)^2=\frac{5}{2}$ Signifie que : $(6x+1)^2=-\frac{5}{2}$ Impossible car : $-\frac{5}{2}$ est négatif

Donc : l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Donc : $S=\varnothing$

3) L'équation : $2(x-1)-(2x-1)^2=2x-18$

$2(x-1)-(2x-1)^2=2x-18$ Signifie que : $2x-2=2x-18+(2x-1)^2$

Signifie que : $16=(2x-1)^2$

Signifie que : $2x-1=\sqrt{16}$ ou $2x-1=-\sqrt{16}$

Signifie que : $2x-1=4$ ou $2x-1=-4$

Signifie que : $2x=5$ ou $2x=-3$

Signifie que : $x=\frac{5}{2}$ ou $x=-\frac{3}{2}$

L'équation admet deux solutions : $x=\frac{5}{2}$ ou $x=-\frac{3}{2}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right\}$

4) $100x^4-x^2=0$ Signifie que : $x^2(100x^2-1)=0$

Signifie que : $x^2=0$ ou $100x^2-1=0$

Signifie que : $x=0$ ou $(10x)^2-1^2=0$

Signifie que : $x=0$ ou $(10x-1)(10x+1)=0$

Signifie que : $x=0$ ou $10x-1=0$ ou $10x+1=0$

Signifie que : $x=0$ ou $x=\frac{1}{10}$ ou $x=-\frac{1}{10}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{-\frac{1}{10};0;\frac{1}{10}\right\}$

5) $x^2-5x+6=0$: On va d'abord déterminer la forme canonique du trinôme $x^2-5x+6=ax^2+bx+c$

$x^2-5x+6=0=1\left(x^2-5x\right)+6$ On factorise par : $a=1$ (ici pas de problème)

$$=1\left[\left(x^2-2\times x\times\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]+6$$: on remarque une identité remarquable :

$$=1\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right]+6=1\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+6=1\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$x^2-5x+6=1\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ Cette écriture s'appelle la forme canonique de x^2-5x+6

$x^2-5x+6=0$ Signifie que : $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$ Signifie que : $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

Signifie que : $x-\frac{5}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}}$ ou $x-\frac{5}{2}=-\sqrt{\frac{1}{4}}$

Signifie que : $x-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$ ou $x-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$

Signifie que : $x=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}$ ou $x=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}$

Signifie que : $x=\frac{6}{2}=3$ ou $x=\frac{4}{2}=2$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{2;3\}$

6) $2(1-x)+x^2=2x-1$ Signifie que : $2-2x+x^2=2x-1$

Signifie que : $x^2-4x+4=1$ Signifie que : $(x-2)^2=1$

Signifie que : $x-2=\sqrt{1}$ ou $x-2=-\sqrt{1}$
Signifie que : $x-2=1$ ou $x-2=-1$
Signifie que : $x=3$ ou $x=1$
Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{1;3\}$

Exercice2 : (**) Déterminer la forme canonique des trinômes suivants :

1) $-x^2+6x-\frac{17}{2}$ 2) $\frac{1}{2}x^2-4x+9$

Solution : 1) Pour écrire $-x^2+6x-\frac{17}{2}$ sous forme canonique on commence par factoriser le trinôme par le coefficient qui est devant x^2 : On obtient $-\left(x^2-6x+\frac{17}{2}\right)$

Puis on doit transformer : $x^2-6x+\frac{17}{2}$ en factorisant avec les identités remarquables :

Pour cela on utilise les deux premiers termes de $x^2-6x+\frac{17}{2}$ (x^2 correspond à a² et $-6x$ à 2ab)

Donc : $a=x$ et $2ab=-6x$ c'est-à-dire : $b=-3$.

Donc : $x^2-6x+\frac{17}{2}=(x-3)^2-...+\frac{17}{2}$

Si on développe $(x-3)^2$ on obtient x^2-6x+9

Pour avoir seulement x^2-6x on doit retrancher 9.

Donc : $x^2-6x+\frac{17}{2}=(x-3)^2-3^2+\frac{17}{2}=(x-3)^2-9+\frac{17}{2}=(x-3)^2-\frac{1}{2}$

Donc : $-x^2+6x-\frac{17}{2}=-1\left[(x-3)^2-\frac{1}{2}\right]$

Donc : $-x^2+6x-\frac{17}{2}=-1(x-3)^2+\frac{1}{2}$

$-1(x-3)^2+\frac{1}{2}$: est la forme canonique de $-x^2+6x-\frac{17}{2}$

Autre méthode : Pour déterminer la forme canonique de : $-x^2+6x-\frac{17}{2}$

Calculons le discriminant de : $-x^2+6x-\frac{17}{2}=ax^2+bx+c$: $a=-1$; $b=6$; $c=-\frac{17}{2}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(6)^2-4\times(-1)\times\left(-\frac{17}{2}\right)=36-34=2$

La forme canonique de : ax^2+bx+c en générale est :

$ax^2+bx+c=a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ Avec $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a^2}$

La forme canonique de $-x^2+6x-\frac{17}{2}$ est:

$-x^2+6x-\frac{17}{2}=-1\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{2\times(-1)}=3$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a^2}=-\frac{2}{4\times(-1)^2}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

Donc : $-x^2+6x-\frac{17}{2}=-1\left[(x-3)^2-\frac{1}{2}\right]$: La forme canonique

2) Pour écrire $\frac{1}{2}x^2-4x+9$ sous forme canonique on commence par factoriser le trinôme par le coefficient qui est devant x^2 : On obtient $\frac{1}{2}(x^2-8x+18)$

Puis on doit transformer : $x^2-8x+18$ en factorisant avec les identités remarquables :

Pour cela on utilise les deux premiers termes de $x^2-8x+18$ (x^2 correspond à a² et $-8x$ à 2ab)

Donc : $a=x$ et $2ab=-8x$ c'est-à-dire : $b=-4$.

Donc : $x^2-8x+18=(x-4)^2-...+18$

Si on développe $(x-4)^2$ on obtient $x^2-8x+16$

Pour avoir seulement x^2-8x on doit retrancher 16.

Donc : $x^2-8x+18=(x-4)^2-4^2+18=(x-4)^2-16+18=(x-4)^2+2$

Donc : $\frac{1}{2}x^2-4x+9=\frac{1}{2}\left[(x-4)^2+2\right]$

Donc : $\frac{1}{2}x^2-4x+9=\frac{1}{2}(x-4)^2+1$

$\frac{1}{2}(x-4)^2+1$ est la forme canonique de $\frac{1}{2}x^2-4x+9$

Autre méthode : Pour déterminer la forme canonique de : $\frac{1}{2}x^2-4x+9$

Calculons le discriminant de: $\frac{1}{2}x^2-4x+9=ax^2+bx+c$: $a=\frac{1}{2}$; $b=-4$; $c=9$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-4)^2-4\times\frac{1}{2}\times 9=16-18=-2$

La forme canonique de : ax^2+bx+c en générale est :

$ax^2+bx+c=a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ Avec $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a^2}$

La forme canonique de $\frac{1}{2}x^2-4x+9$ est:

$\frac{1}{2}x^2-4x+9=\frac{1}{2}\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times\frac{1}{2}}=4$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a^2}=-\frac{-2}{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}=2$

Donc : $\frac{1}{2}x^2-4x+9=\frac{1}{2}\left[(x-4)^2+2\right]$: La forme canonique

Exercice3 : (*) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations $P(x)=0$ et factoriser le trinôme $P(x)$:

a) $P(x)=3x^2-x-3$ b) $P(x)=2x^2-x-2+\sqrt{2}$ c) $P(x)=-4x^2+4x-1$

d) $P(x)=-10x^2+3x-\frac{1}{4}$

Solution : a) $P(x)=3x^2-x-3$

Calculons le discriminant de l'équation $3x^2-x-3=0$: $a=3$; $b=-1$; $c=-3$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-1)^2-4\times 3\times(-3)=1+36=37>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{37}}{2\times 3}=\frac{1-\sqrt{37}}{6}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{37}}{2\times 3}=\frac{1+\sqrt{37}}{6}$

Donc : $S=\left\{\frac{1-\sqrt{37}}{6};\frac{1+\sqrt{37}}{6}\right\}$

Et le trinôme $P(x)=3x^2-x-3$ a une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

C'est-à-dire : $P(x)=3\left(x-\frac{1-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{37}}{6}\right)$

b) $P(x)=x^2-x-2+\sqrt{2}$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2-x-2+\sqrt{2}=0$: $a=1$; $b=-1$; $c=\sqrt{2}-2$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-1)^2-4\times 1\times(\sqrt{2}-2)=1-4\sqrt{2}+8=8-4\sqrt{2}+1^2$

Donc : $\Delta=(2\sqrt{2})^2-2\times 2\sqrt{2}\times 1+1^2=(2\sqrt{2}-1)^2>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{(2\sqrt{2}-1)^2}}{2\times 1}=\frac{1-|2\sqrt{2}-1|}{2}=\frac{1-(2\sqrt{2}-1)}{2}=\frac{1-2\sqrt{2}+1}{2}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{\left(2\sqrt{2}-1\right)^2}}{2\times1}=\frac{1+\left|2\sqrt{2}-1\right|}{2}=\frac{1+\left(2\sqrt{2}-1\right)}{2}=\frac{1+2\sqrt{2}-1}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

Donc : $S=\left\{1-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$

Et le trinôme $P(x)=x^2-x-2+\sqrt{2}$ a une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$

C'est-à-dire : $P(x)=1\left(x-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\sqrt{2}\right)=\left(x-1+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$

c) Calculons le discriminant de l'équation $-4x^2+4x-1=0$: $a=-4$; $b=4$; $c=-1$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=4^2-4\times(-4)\times(-1)=16-16=0$

Comme $\Delta=0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\times(-4)}=\frac{1}{2}$

Donc : $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ et le trinôme $P(x)=-4x^2+4x-1$ a une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)^2$

$$-4x^2+4x-1=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

d) $P(x)=-10x^2+3x-\frac{1}{4}$

Calculons le discriminant de l'équation $-10x^2+3x-\frac{1}{4}=0$: $a=-10$; $b=3$; $c=-\frac{1}{4}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=3^2-4\times(-10)\times\left(-\frac{1}{4}\right)=9-10=-1<0$

Comme $\Delta<0$, l'équation ne possède pas de solution réelle c'est-à-dire : $S=\varnothing$

Et le trinôme $P(x)=-10x^2+3x-\frac{1}{4}$ ne peut pas être factorisée

Exercice4 : (**) Soit le trinôme (E) : $P(x)=3x^2-7x+1$

1) Prouver que le trinôme (E) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha+\beta$; $\alpha\times\beta$; $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$; $\alpha^2+\beta^2$; $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha^3+\beta^3$

Solution : 1) $a=3$: **et** **et** $b=-7$ **et** $c=1$

$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times3\times1=49-12=37$

Comme $\Delta>0$: le trinôme (E) a deux racines distinctes : α et β

2) On a : $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ et $\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$ donc $\alpha+\beta=\frac{-(-7)}{3}=\frac{7}{3}$ et $\alpha\times\beta=\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}}=7$$

On a : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Donc $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$

Donc $\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{7}{3}\right)^2-2\frac{1}{3}=\frac{49}{9}-\frac{2}{3}=\frac{43}{9}$

On a : $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\frac{43}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{43}{9}\times 3=\frac{43}{3}$

On sait que : $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=\left(\frac{7}{3}\right)^3-3\times\frac{1}{3}\times\frac{7}{3}=\frac{343}{27}-\frac{7}{3}=\frac{280}{27}$

**Exercice5 : (***) Résoudre l'équation suivante : $x^2-22x-23=0$ (utiliser le discriminant réduit)

Solution : on a : b = -22 et 22 est pair b = -2 x 11 donc b' = - 11

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=(-11)^2-1\times(-23)=121+23=144$

Comme Δ' > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-(-11)-\sqrt{144}}{1}=\frac{11-12}{1}=-1$ et $x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-(-11)+\sqrt{144}}{1}=\frac{11+12}{1}=23$ donc : $S=\{-1;23\}$

**Exercice6 : (*****) En additionnant les âges de Fatima et de Najat on trouve 44. En multipliant leurs âges on trouve 468. Najat est plus jeune que Fatima. Quel âge à Fatima ?

Solution : Posons x ="l'âge de Najat " et y ="l'âge de Fatima ".

x et y vérifient le système : $\begin{cases} x+y=44 \\ x\times y=468 \end{cases}$

De la première équation on tire $y=44-x$ puis en remplaçant cette valeur de y dans la deuxième équation :
$x\times y=468$ on obtient : $x\times(44-x)=468$

Donc : $44x-x^2=468$

Donc : $-x^2+44x-468=0$ et On obtient une équation du deuxième degré.

Résolvons cette équation : Calculons delta : $\Delta=44^2-4\times(-1)\times(-468)=1936-1872=64$

L'équation admet donc deux solutions :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-44-\sqrt{64}}{-2}=\frac{-44-8}{-2}=\frac{-532}{-2}=26$ Et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-44+-\sqrt{64}}{-2}=\frac{-44+8}{-2}=\frac{-36}{-2}=18$

Si x = 26, alors : $y=44-x=44-26=18$

Et si x = 18 alors : $y=44-x=44-18=26$

Donc 18 et 26 sont les âges de Fatima et de Najat.
Comme Najat est plus jeune que Fatima alors Fatima a 26 ans.

**Exercice7 : (****) Factoriser les expressions suivantes :

1) x^4-5x^2+4 2) x^4-5x^2+6 3) x^4-6x^2+5

Solution : 1) x^4-5x^2+4 On pose : $X=x^2$ donc on a: X^2-5X+4

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9$

Donc : $X_1=\frac{-(-5)+3}{2\times 1}=\frac{8}{2}=4$ et $X_2=\frac{-(-5)-3}{2\times 1}=\frac{2}{2}=1$

Donc : $X^2-5X+4=(X-4)(X-1)$

Donc : $x^4-5x^2+4=(x^2-4)(x^2-1)$

Par suite : $x^4-5x^2+4=(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$

2) x^4-5x^2+6 On pose : $X=x^2$ donc on a: X^2-5X+6 et $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$

Donc : $X_1=\frac{-(-5)+1}{2\times1}=\frac{6}{2}=3$ et $X_2=\frac{-(-5)-1}{2\times1}=\frac{4}{2}=2$

Donc : $X^2-5X+6=(X-2)(X-3)$

Donc : $x^4-5x^2+6=(x^2-2)(x^2-3)$

Par suite : $x^4-5x^2+4=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

3) x^4-6x^2+5 On pose : $X=x^2$ donc on a: X^2-6X+5 et $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 36 - 20 = 16$

Donc : $X_1=\frac{-(-6)+4}{2\times1}=\frac{10}{2}=5$ et $X_2=\frac{-(-6)-4}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$

Donc : $X^2-6X+5=(X-5)(X-1)$

Donc : $x^4-6x^2+5=(x^2-5)(x^2-1)$

Donc : $x^4-6x^2+5=\left(x^2-\sqrt{5}^2\right)(x^2-1^2)$

Par suite : $x^4-6x^2+5=(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x-1)(x+1)$

Exercice8 : (***) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $6x^2-5x+1=0$

2) En déduire les solutions de l'équation suivante : $6\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-5\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+1=0$

Solution : 1) Calculons le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=25-24=1\succ0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{5+1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{5-1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ donc : $S=\{-1;8\}$

2) $6\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-5\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+1=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=\frac{x+1}{x-1}$ et $x\neq1$

Nous obtenons l'équation : $6X^2-5X+1=0$

Donc : d'après 1) on a: $X=\frac{1}{2}$ ou $X=\frac{1}{3}$

Donc : $\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{2}$ ou $\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{3}$

Signifie : $2(x+1)=x-1$ ou $3(x+1)=x-1$

Signifie : $2x+2=x-1$ ou $3x+3=x-1$

Signifie : $x=-3$ ou $2x=-4$

Signifie : $x=-3$ ou $x=-2$ Par suite : $S=\{-3;-2\}$

Exercice9 : (***) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) : $x^4-7x^3+16x^2-14x+4=0$

1) a) Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E)

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : (E') : $X^2-7X+12=0$

2) Montrer que si α est solution de l'équation (E) alors : $\alpha+\frac{2}{\alpha}$ est solution de l'équation (E')

3) En déduire les solutions de l'équation (E)

Solution : 1) On a : $0^4-7\times0^3+16\times0^2-14\times0+4=4\neq0$

Donc : 0 n'est pas solution de l'équation (E)

2) (E') : $X^2-7X+12=0$

Calculons delta : $\Delta=(-7)^2-4\times1\times12=49-48=1$

L'équation admet donc deux solutions :

$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7-1}{2}=3$ et $X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7+1}{2}=4$ Donc : $S=\{1;2\}$

2) Soit α solution de l'équation (E) donc : $\alpha^4-7\alpha^3+16\alpha^2-14\alpha+4=0$ (1)

Donc : $\alpha\neq0$ d'après 1)a)

Montrons que : $\alpha+\frac{2}{\alpha}$ est solution de l'équation (E')

Il suffit de montrer que : $\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)^2-7\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)+12=0$?

$$\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)^2-7\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)+12=\alpha^2+2\alpha\times\frac{2}{\alpha}+\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2-7\alpha-\frac{14}{\alpha}+12$$

$$=\alpha^2+4+\frac{4}{\alpha^2}-7\alpha-\frac{14}{\alpha}+12=\alpha^2-7\alpha+16+\frac{4}{\alpha^2}-\frac{14}{\alpha}=\frac{\alpha^4-7\alpha^3+16\alpha^2-14\alpha+4}{\alpha^2}$$

Et puisque on a : $\alpha^4-7\alpha^3+16\alpha^2-14\alpha+4=0$ (1) donc : $\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)^2-7\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)+12=\frac{0}{\alpha^2}=0$

Par suite : $\alpha+\frac{2}{\alpha}$ est solution de l'équation (E')

3) d'après 1)b) les solutions de l'équation (E) sont les solutions des équations : $\alpha+\frac{2}{\alpha}=3$ et $\alpha+\frac{2}{\alpha}=4$

- $\alpha+\frac{2}{\alpha}=3$ Signifie : $\frac{\alpha^2+2}{\alpha}=3$

  Signifie : $\alpha^2-3\alpha+2=0$

Calculons delta : $\Delta=(-3)^2-4\times2=1$

L'équation admet donc deux solutions : $x_1=\frac{3-1}{2}=1$ Et $x_2=\frac{3+1}{2}=2$

- $\alpha+\frac{2}{\alpha}=4$ Signifie : $\frac{\alpha^2+2}{\alpha}=4$

  Signifie : $\alpha^2-4\alpha+2=0$

Calculons delta : $\Delta=(-4)^2-4\times2=8$

L'équation admet donc deux solutions : $x_1=\frac{4-\sqrt{8}}{2}=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$ Et $x_2=\frac{4+\sqrt{8}}{2}=\frac{4+2\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2}$

Donc : $S=\{1;2;2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\}$

Exercice10: (***) (Equations avec des racines carrées)

Résoudre dans $\mathbb{R}$; l'équation suivante : $\sqrt{3x+4}=x$

Corrigé :

Remarque : La relation $a=b\Leftrightarrow a^2=b^2$ n'est pas vraie si les deux nombres sont de signes contraires.

a) L'équation est définie si $3x+4\geq0$ Signifie que : $x\geq-\frac{4}{3}$

L'équation est donc définie sur : $D_E=\left[-\frac{4}{3},+\infty\right[$

b) Je travaille par équivalence en m'assurant que les deux membres sont positifs avant d´élever au carré.

$\sqrt{3x+4}=x$ Signifie que : $\sqrt{3x+4}^2=x^2$ et $x\geq0$

Signifie que : $3x+4=x^2$ et $x\geq 0$

Signifie que : $-x^2+3x+4=0$ et $x\geq 0$

Le discriminant de : $-x^2+3x+4=0$ est : $\Delta=3^2-4\times4\times(-1)=9+16=25>0$ et ses solutions sont :

$x_1=\dfrac{-3+\sqrt{25}}{2\times(-1)}=\cancel{-1}$ et $x_2=\dfrac{-3-\sqrt{25}}{2\times(-1)}=4\in D_E$ et $x\geq 0$

$-x^2+3x+4=0$ et $x\geq -\dfrac{4}{3}$ et $x\geq 0$ Signifie que : $x=4\in D_E$

Par conséquent : $S=\{4\}$

Exercice11 : (***) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre m l'équation suivante :
$m^3x+1=x+3$

Corrigé : Soit $x\in\mathbb{R}$: on va écrire cette équation sous la forme : $ax+b=0$

$m^3x+1=x+3$ Équivalent à : $m^3x-x+1-3=0$

Équivalent à : $(m^3-1)x-2=0$

Équivalent à : $(m-1)(m^2+m+1)x-2=0$

On a : $(m-1)(m^2+m+1)=0$ Équivalent à : $m-1=0$ ou $m^2+m+1=0$

Pour : $m^2+m+1=0$ $\Delta=-3<0$ pas de solutions

Donc : $(m-1)(m^2+m+1)=0$ Équivalent à : $m=1$

1ére cas : $m\neq 1$:

Alors : $(m-1)(m^2+m+1)x-2=0$ Équivalent à : $(m-1)(m^2+m+1)x=2$

Équivalent à : $x=\dfrac{2}{(m-1)(m^2+m+1)}$

Donc : L'équation admet une solution unique : $x=\dfrac{2}{(m-1)(m^2+m+1)}$

Par suite : $S=\left\{\dfrac{2}{(m-1)(m^2+m+1)}\right\}$

2ére cas : $m=1$: L'équation devient : $0x-2=0$ Équivalent à : $-2=0$

Donc : $S=\varnothing$

Exercice12 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (I) ; $\dfrac{4x^2-3x-9}{x^2-5}\leq 2$

Corrigé : Partie1 : L'ensemble de définition de l'inéquation (I) est donc $D_E=\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$.

Partie2 : $\dfrac{4x^2-3x-9}{x^2-5}\leq 2$ Equivaut à : $\dfrac{4x^2-3x-9}{x^2-5}-2\leq 0$

Equivaut à : $\dfrac{4x^2-3x-9-2x^2+10}{x^2-5}\leq 0$

Equivaut à : $\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-5}\leq 0$

$2x^2-3x+1=0$: $\Delta=1>0$ donc $2x^2-3x+1=0$ admet deux solutions Distinctes $x_1=1$et $x_2=\dfrac{1}{2}$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$1/2$		1		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2-5		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$q(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

Par suite : $S=\left[-\sqrt{5},\frac{1}{2}\right[\cup\left[1,\sqrt{5}\right[$

Exercice13 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $x(x+2)\geq(2x+1)(x+2)$ 2) $\frac{1}{x}<\frac{1}{2x-1}$

Corrigé : Méthode : Pour résoudre l'inéquation : $x(x+2)\geq(2x+1)(x+2)$

on transforme tout d'abord l'inéquation pour se ramener à une étude de signes de facteurs du premier degré:

$x(x+2)\geq(2x+1)(x+2)$ Signifie que : $x(x+2)-(2x+1)(x+2)\geq0$

Signifie que : $(x+2)\left[x-(2x+1)\right]\geq0$

Signifie que : $(x+2)(x-2x-1)\geq0$

Signifie que : $(x+2)(-x-1)\geq0$

On peut alors dresser le tableau de signes de l'expression : $(x+2)(-x-1)$

$-x-1=0$ Signifie que : $x=-1$

$x+2=0$ Signifie que : $x=-2$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$-1-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(-1-x)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On cherche à résoudre l'inéquation : $(x+2)(-x-1)\geq0$ Donc : $S=\left[-2,-1\right[$

Exercice14 : (*) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $2x^2-10>-x$ 2) $-2x^2-3>-5x$ 3) $\frac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2}\geq0$ 4) $-2x(x-2)(x^2-8x+16)>0$

Solution :

Comment : Résoudre une inéquation du second degré algébriquement

• Réarrangez l'inéquation de sorte à rassembler tous les termes d'un même côté, en une expression définie comme $f(x)$ et à n'avoir plus que zéro de l'autre côté. Par exemple, $f(x)\leqslant0$ ou $f(x)>0$.

• Résolvez $f(x)=0$ en factorisant, ou par la méthode de votre choix pour trouver les solutions de l'équation.

• Sélectionnez une valeur de test dans chaque intervalle : une valeur inférieure aux solutions de l'équation, une valeur comprise entre les solutions et une valeur supérieure aux solutions. Nous pouvons également utiliser un tableau de signes pour identifier les intervalles qui seront positifs ou négatifs.

• Identifiez les intervalles dont les valeurs vérifient l'inégalité.

1) $2x^2-10>-x$

On va regrouper tous les termes dans le même membre de l'inéquation pour obtenir une inéquation du type : $ax^2+bxc>0$

$2x^2-10>-x$ Signifie que : $\boxed{2x^2+x-10>0}$

Et on va déterminer le signe du trinôme : $2x^2+x-10$

Calculons le discriminant de $2x^2+x-10$: $a=2$; $b=1$; $c=-10$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=1^2-4\times2(-10)=1+80=81>0$

Comme $\Delta>0$, trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{81}}{2\times2}=\frac{-10}{4}=-\frac{5}{2}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{81}}{2\times2}=\frac{8}{4}=2$

On obtient le tableau de signe suivant : $a=2>0$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2+x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S=\left]-\infty;-\frac{5}{2}\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

2) $-2x^2-3>-5x$:

On va regrouper tous les termes dans le même membre de l'inéquation pour obtenir une inéquation du type : $ax^2+bxc>0$

$-2x^2-3>-5x$ Signifie que : $\boxed{-2x^2+5x-3>0}$

Et on va déterminer le signe du trinôme : $-2x^2+5x-3$

Calculons le discriminant de $-2x^2+5x-3$: $a=-2$; $b=5$; $c=-3$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=5^2-4\times(-2)(-3)=25-24=1>0$

Comme $\Delta>0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-\sqrt{1}}{2\times(-2)}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{1}}{2\times(-2)}=\frac{-4}{-4}=1$

On obtient le tableau de signe suivant : $a=-2<0$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+5x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S=\left]1;\frac{3}{2}\right[$

3) $\frac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2}\geq0$

Pour déterminer le signe du trinôme : $7x+5-6x^2$

Calculons son discriminant : $a=-6$; $b=7$; $c=5$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=7^2-4\times(-6)\times5=49+120=169>0$

Comme $\Delta>0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\frac{-7-\sqrt{169}}{2a}=\frac{-7-13}{2\times(-6)}=\frac{5}{3}$ et $x_2=\frac{-7+\sqrt{169}}{2a}=\frac{-7+13}{2\times(-6)}=-\frac{1}{2}$

$-3(1-x)^2\leq0$ Car un carré est toujours positif ou nul.

$-3(1-x)^2=0$ Signifie que : $1-x=0$ Signifie que : $x=1$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$7x+5-6x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$-3(1-x)^2$		$-$		$-$	0	$-$		$-$	
$\frac{5(7x+5-6x^2)}{-3(1-x)^2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{3};+\infty\right[$

4) $-2x(x-2)(x^2-8x+16)>0$

$-2x(x-2)(x^2-8x+16)=0$ Signifie que : $x^2-8x+16=0$ ou $x-2=0$ ou $x=0$

Signifie que : $x^2-8x+16=0$ ou $x=2$ ou $x=0$

Pour déterminer le signe du trinôme : $x^2-8x+16$

Calculons son discriminant : $a=1$; $b=-8$; $c=16$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-8)^2-4\times1\times16=64-64=0$

Comme : Le coefficient principal est : $a=1>0$ et $\Delta=0$, alors : $x^2-8x+16\geq0$

La racine double est : $x_1=\frac{8}{2\times1}=4$

$-2x(x-2)(x^2-8x+16)=0$ Signifie que : $x=4$ ou $x=2$ ou $x=0$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2-8x+16$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$-2x(x-2)(x^2-8x+16)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Donc : l'ensemble de solutions de : $-2x(x-2)(x^2-8x+16)>0$ est : $S=]0;2]$

Exercice15 : On considère l´équation : (E) : $6x^3+25x^2+21x-10=0$

1) Montrer que le nombre -2 est solution de (E)

2) Déterminer trois réels : a, b et c tels que : $6x^3+25x^2+21x-10=(x+2)(ax^2+bx+c)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : (I) : $6x^3+25x^2+21x-10>0$

Corrigé :1) On remarque que $6\times(-2)^3+25\times(-2)^2+21\times(-2)-10=-48+100-42-10=100-100=0$

Donc : le nombre -2 est solution de (E)

2) le nombre -2 est solution de (E) donc il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que :

$6x^3+25x^2+21x-10=(x+2)(ax^2+bx+c)$

Or, $(x+2)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b+2a)x^2+(c+2b)x+2c$.

Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

On trouve : $\begin{cases} a=6 \\ b+2a=25 \\ c+2b=21 \\ 2c=-10 \end{cases}$ Equivaut à : $\begin{cases} a=6 \\ b=13 \\ c=-5 \end{cases}$

Donc : $6x^3+25x^2+21x-10=(x+2)(6x^2+13x-5)$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

$6x^3+25x^2+21x-10=0$ Equivaut à : $(x+2)(6x^2+13x-5)=0$

Equivaut à : $x+2=0$ ou $6x^2+13x-5=0$

Equivaut à : $x=-2$ ou $6x^2+13x-5=0$

Le discriminant de : $6x^2+13x-5=0$ est : $\Delta=13^2-4\times6\times(-5)=169+120=289=17^2$ et ses solutions sont :

$x_1=\dfrac{-13-\sqrt{289}}{2\times6}=\dfrac{-13-17}{12}=\dfrac{-30}{12}=-\dfrac{5}{2}$ et $x_2=\dfrac{-13+\sqrt{289}}{2\times6}=\dfrac{-13+17}{12}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

Ainsi, l'ensemble solution de (E) est : $S=\left\{-\dfrac{5}{2};-2;\dfrac{1}{3}\right\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : (I) : $6x^3+25x^2+21x-10>0$

On a : $6x^3+25x^2+21x-10=(x+2)(6x^2+13x-5)$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-5/2$		-2		$1/3$		$+\infty$
$6x^2+13x-5$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$p(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble solution de (I) est : $S=\left]-\dfrac{5}{2},-2\right[\cup\left]\dfrac{1}{3},+\infty\right[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien