Correction Série N°4 : Les polynômes

Exercice1 : (**) Soit : $P(x)=2x^3+9x^2+7x-6$

1) Montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x+3$

2) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x+3$ montrer que : $P(x)=(x+3)Q(x)$ avec $Q(x)=2x^2+3x-2$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x)\geq 0$

5) En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$ en un produit de polynômes de 1ere degrés

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\succ 0$

Solution :1) $P(x)=2x^3+9x^2+7x-6$

On a $P(-3)=2\times(-3)^3+9(-3)^2+7\times(-3)-6=-54+81-21-6=0$ donc -3 est racine du polynôme $P(x)$

Donc $P(x)$ est divisible par $x+3$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+9x^2+7x-6 & x+3 \\ \hline +\ -2x^3-6x^2 & 2x^2+3x-2 \\ \hline 3x^2+7x-6 & \\ -3x^2-9x & \\ \hline -2x-6 & \\ 2x+6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

2) Donc : $P(x)=(x+3)Q(x)$ avec : $Q(x)=2x^2+3x-2$

3) $Q(x)=2x^2+3x-2$ et $Q(x)=0$

$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9+16 = 25$

Donc : $x_1=\frac{-3-\sqrt{25}}{2\times 2}=\frac{-8}{4}=-2$ et $x_2=\frac{-3+\sqrt{25}}{2\times 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Par suite: $S=\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

4) $Q(x)<0$ les racines de $Q(x)$ sont : $x_1=-2$ et $x_2=\frac{1}{2}$

Donc le tableau de Signe est:

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-2;\frac{1}{2}\right[$

5) Cherchons une factorisation du polynôme $P(x)$ en produits de polynômes de 1ere degrés:

On a : $P(x)=(x+3)Q(x)$ avec $Q(x)=2x^2+3x-2$

Et les racines du polynôme $Q(x)$ sont : $x_1=-2$ et $x_2=\frac{1}{2}$.

Donc : une factorisation de $Q(x)$ est : $Q(x)=2(x-x_1)(x-x_2)$

Donc : $Q(x)=2(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(2x-1)(x+2)$

Par suite une factorisation de $P(x)$ est : $P(x)=(x+3)(2x-1)(x+2)$.

6) On a : $P(x)=(x+3)(2x-1)(x+2)$

$P(x)=0$ Signifie ; $(x+3)(2x-1)(x+2)=0$

Signifie : $x+2=0$ ou $2x-1=0$ ou $x+3=0$

Signifie : $x=-2$ ou $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-3$ par suite : $S=\left\{-3,-2,\frac{1}{2}\right\}$

7) $P(x)<0$ Signifie: $(x+3)Q(x)<0$

x	$-\infty$		-3		-2		$1/2$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc: $S=\left]-\infty;-3\right[\cup\left]-2;\frac{1}{2}\right[$

Exercice2 : (***) Soit : $P(x)=-3x^3-8x^2-3x+2$

1) Montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x+1$

2) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x+1$

Montrer que : $P(x)=(x+1)Q(x)$ avec $Q(x)=-3x^2-5x+2$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x)\geq 0$

5) En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$ en un produit de polynômes de 1ere degrés

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)>0$

Solution :1) $P(x)=-3x^3-8x^2-3x+2$

On a $P(-1)=-3\times(-1)^3-8(-1)^2-3\times(-1)+2=+3-8+3+2=0$ donc --1 est racine du polynôme $P(x)$

Donc $P(x)$ est divisible par $x+1$

2) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x+1$

$$\begin{array}{r|l} -3x^3-8x^2-3x+2 & x+1 \\ \cline{2-2} + \; 3x^3+3x^2 & -3x^2-5x+2 \\ \cline{1-1} -5x^2-3x+2 & \\ 5x^2+5x & \\ \cline{1-1} 2x+2 & \\ -2x-2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

On a : $P(x)=(x+1)Q(x)$ avec : $Q(x)=-3x^2-5x+2$

3) $Q(x)=-3x^2-5x+2$ et $Q(x)=0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49$

Donc : $x_1=\frac{5-\sqrt{49}}{2\times(-3)}=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{49}}{2\times(-3)}=\frac{12}{-6}=-2$

Par suite: $S=\left\{-2,\frac{1}{3}\right\}$

4) $Q(x)<0$ les racines de $Q(x)$ Sont : $x_2=-2$ et $x_1=\frac{1}{3}$.

Donc le tableau de signe est:

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$Q(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $S=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

5) Cherchons une factorisation du polynôme $P(x)$ en produits de polynômes de 1ere degrés:

On a : $P(x)=(x+1)Q(x)$ avec $Q(x)=-3x^2-5x+2$

Et les racines du polynôme $Q(x)$ sont : $x_1=\frac{1}{3}$ et $x_2=-2$.

Donc : une factorisation de $Q(x)$ est : $Q(x)=-3(x-x_1)(x-x_2)$

Donc : $Q(x)=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)=(-3x+1)(x+2)$

Par suite une factorisation de $P(x)$ est : $P(x)=(x+1)(-3x+1)(x+2)$

6) On a : $P(x)=(x+1)(-3x+1)(x+2)$.

$P(x)=0$ Signifie ; $(x+1)(-3x+1)(x+2)=0$

Signifie : $x+1=0$ ou $-3x+1=0$ ou $x+2=0$

Signifie : $x=-1$ ou $x=\frac{1}{3}$ ou $x=-2$ par suite : $S=\left\{-2,-1,\frac{1}{3}\right\}$

7) $P(x)<0$ Signifie: $(x+1)Q(x)<0$

x	$-\infty$ -2		-1		$1/3$ $+\infty$	
$Q(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$x+1$	$-$		$-$	0 $+$		$+$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0 $+$	0	$-$

Donc: $S=]-2;-1[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

Exercice3 : (**) Factoriser les polynômes (ou trinômes) suivants :

1) $P(x)=\frac{9}{2}x^2-6x+2$ 2) $Q(x)=2x^2-9x+10$

Solution : 1) $P(x)=\frac{9}{2}x^2-6x+2=ax^2+bx+c$ donc : $a=\frac{9}{2}$; $b=-6$; $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times\frac{9}{2}\times2=0$; Le polynôme a donc une unique racine dite « double » que l'on note :

$x_0=-\frac{b}{2\times a}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

Par suite: $P(x)=a(x-x_0)^2=\frac{9}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$

2) $Q(x)=2x^2-9x+10$

On peut remarquer que :2 est une racine évidente polynôme $Q(x)$

Car : $Q(2)=2\times2^2-9\times2+10=8-18+10=0$

Donc : $Q(x)$ est divisible par $x-2$

Donc : il existe un polynôme $R(x)$ tel que : $Q(x)=(x-2)\times R(x)$

Déterminons : $R(x)$

Methode1 : Puisque : $\deg Q=2$ et $\deg Q=\deg(x-2)+\deg R$

Donc : $2=1+\deg R$ c'est-à-dire : $\deg R=1$

Donc : $R(x)=ax+b$

$Q(x)=(x-2)\times R(x)$ Signifie que : $2x^2-9x+10=(x-2)\times(ax+b)$

Signifie que : $2x^2-9x+10=ax^2+bx-2ax-2b$

Signifie que : $2x^2-9x+10=ax^2+(b-2a)x-2b$

Par identification on a donc : $\begin{cases} a=2 \\ b-2a=-9 \\ -2b=10 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} a=2 \\ b=-5 \\ -2b=10 \end{cases}$

D'où : $2x^2-9x+10=(x-2)\times(2x-5)$

Methode2 : On a $Q(x)=(x-2)\times R(x)$

Il suffit d'effectuer la division euclidienne du polynôme $Q(x)$ par : $x-2$

Et la division donne : $R(x)=2x-5$

Exercice4 : (***) On donne :

$P(x)=-2x^3-4x^2+x-1$ et $Q(x)=-2x^2-18x-125$ et $R(x)=-876$

Trouver le nombre réel a pour que $Q(x)$ et $R(x)$ soient respectivement le quotient et le reste la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $x-a$

Solution : D'après la division euclidienne on a : $P(x)=(x-a)\times Q(x)+R(x)$

D'où : $-2x^3-4x^2+x-1=(x-a)\times(-2x^2-18x-125)-876$

$=-2x^3-(18-2a)x^2-(125-18a)x+(125a-876)$

D'où : $\begin{cases} 18-2a=4 \\ 125-18a=-1 \\ 125a-876=-1 \end{cases}$ nous en déduisons : $a=7$

Exercice5 : (***) Déterminer le polynôme $P(x)$ sachant que ses racines sont 1 ; 2 ; 3 et que :

$P(4)=4$ et $\deg P=3$

Solution : Conformément aux données nous avons : $P(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)$ Avec : $a\in\mathbb{R}$

Or $P(4)=4$ implique : $4=a(4-1)(4-2)(4-3)$

Donc : $4=6a$ d'où : $a=\frac{2}{3}$ Par conséquent : $P(x)=\frac{2}{3}(x-1)(x-2)(x-3)$

Donc : par développement on trouve : $P(x)=\frac{2}{3}x^3-4x^2+\frac{22}{3}x-4$

Exercice6 : (**) Soit : $P(x)=x^4-3x^3-5x^2+13x+6$

Calculer : $P(-2)$ et $P(3)$ et factoriser $P(x)$.

Solution : On a $P(x)=x^4-3x^3-5x^2+13x+6$

$P(-2)=(-2)^4-3\times(-2)^3-5\times(-2)^2+13(-2)+6=0$ et $P(3)=(3)^4-3\times(3)^3-5\times(3)^2+13(3)+6=0$

Donc : -2 et 3 sont des racines du polynôme $P(x)$

Donc : $P(x)$ est divisible par $x+2$ et $x-3$

Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x+2$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-3x^3-5x^2+13x+6 & x+2 \\ \cline{2-2}
-\;\; x^4+2x^3 & x^3-5x^2+5x+3 \\ \cline{1-1}
-5x^3-5x^2+13x+6 & \\
-\;\; -5x^3-10x^2 & \\ \cline{1-1}
5x^2+13x+6 & \\
-\;\; 5x^2+10x & \\ \cline{1-1}
3x+6 & \\
-\;\; 3x+6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Donc : $P(x)=(x+2)(x^3-5x^2+5x+3)$

Et $Q(x)=x^3-5x^2+5x+3x+2$

Effectuons la division euclidienne de $Q(x)$ par $x-3$ (Car : $P(3)=Q(3)=0$)

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-5x^2+5x+3 & x-3 \\ \cline{2-2}
x^3+3x^2 & x^2-2x-1 \\ \cline{1-1}
-2x^2+5x+3 & \\
2x^2-6x & \\ \cline{1-1}
-x+3 & \\
x-3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Donc : $x^3-5x^2+5x+3x+2=(x-3)(x^2-2x-1)$ par suite : $P(x)=(x+2)(x-3)(x^2-2x-1)$

Exercice7 : Soit le polynôme suivant (E) : $P(x)=x^3-\sqrt{5}x^2-x+\sqrt{5}$

1) Montrer que -1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}\right)$

3) On pose : $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}$ et soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta=\left(\sqrt{5}-1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) En déduire les solutions de l'équation $x-\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{5}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\geq 0$

Solution : $P(x)=x^3-\sqrt{5}x^2-x+\sqrt{5}$

$P(-1)=(-1)^3-\sqrt{5}(-1)^2-(-1)+\sqrt{5}$

$P(-1)=-1-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}=0$

Donc : **-1** est racine du polynôme $P(x)$

2) $(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}\right)=x^3-\left(\sqrt{5}+1\right)x^2+\sqrt{5}x+x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}$

$$= x^3 - \sqrt{5}x^2 - x^2 + \sqrt{5}x + x^2 - \sqrt{5}x - x + \sqrt{5}$$
$$= x^3 - \sqrt{5}x^2 - x + \sqrt{5} = P(x)$$

3)a) $Q(x) = x^2 - \left(\sqrt{5}+1\right)x + \sqrt{5}$ $a = 1$ et $b = -\left(\sqrt{5}+1\right)$ et $c = \sqrt{5}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\left(\sqrt{5}+1\right)\right)^2 - 4\times\sqrt{5}\times 1 = \left(\sqrt{5}+1\right)^2 - 4\sqrt{5}$$

$$\Delta = \sqrt{5}^2 + 2\times 1\times\sqrt{5} + 1^2 - 4\sqrt{5} = \sqrt{5}^2 - 2\sqrt{3} + 1^2 = \left(\sqrt{5}-1\right)^2$$

3)b) $Q(x) = x^2 - \left(\sqrt{5}+1\right)x + \sqrt{5}$ et $\Delta = \left(\sqrt{5}-1\right)^2$

Puisque : $\Delta > 0$ donc il y'a deux racines :

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}+1+\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{2\times 1} = \frac{\sqrt{5}+1+\left|\sqrt{5}-1\right|}{2\times 1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{2\times 1} = \frac{\sqrt{5}+1-\left|\sqrt{5}-1\right|}{2\times 1}$$

Or on a : $\sqrt{5} \succ 1$ car $\left(\sqrt{5}\right)^2 \succ (1)^2$ Donc $\sqrt{5}-1 \succ 0$ par suite: $\left|\sqrt{5}-1\right| = \sqrt{5}-1$

Donc : $x_1 = \frac{\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1}{2\times 1} = \sqrt{5}$ et $x_2 = \frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{2\times 1} = 1$ par suite : $S = \left\{1, \sqrt{5}\right\}$

4) $x - \left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{x} + \sqrt{5} = 0$ Est équivalente à: $\sqrt{x}^2 - \left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{x} + \sqrt{5} = 0$

On pose : $X = \sqrt{x}$ et on a donc : $X^2 - \left(\sqrt{5}+1\right)X + \sqrt{5} = 0$

Mais d'après 3) b) on a : $X_1 = \sqrt{5}$ et $X_2 = 1$ qui Signifie que : $\sqrt{x_1} = \sqrt{5}$ et $\sqrt{x_2} = 1$

Qui Signifie que: $\left(\sqrt{x_1}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$ et $\left(\sqrt{x_2}\right)^2 = 1^2$

Qui Signifie que: $x_1 = 5$ et $x_2 = 1$ par suite: $S = \{1, 5\}$

5) On a: $P(x) = (x+1)\left(x^2 - \left(\sqrt{5}+1\right)x + \sqrt{5}\right)$

$P(x) = 0$ Signifie $x + 1 = 0$ ou $x^2 - \left(\sqrt{5}+1\right)x + \sqrt{5} = 0$

Signifie $x_0 = -1$ ou $x_1 = \sqrt{5}$ ou $x_2 = 1$ Par suite: $S = \left\{-1, 1, \sqrt{5}\right\}$

6) $P(x) \geq 0$ est équivalente à: $(x+1)\left(x^2 - \left(\sqrt{5}+1\right)x + \sqrt{5}\right) \geq 0$

x	$-\infty$		-1		1		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S = [-1; 1] \cup \left[\sqrt{5}; +\infty\right[$

Exercice8 : (***) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4\sqrt{x+2} = x+5$

Solution : a) L'équation est définie si $x+2 \geq 0$ Signifie que : $x \geq -2$

L'équation est donc définie sur : $D_E = [-2, +\infty[$

Remarque : La relation $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ n'est pas vraie si les deux nombres sont de signes contraires.

b) Je travaille par équivalence en m'assurant que les deux membres

Sont positifs avant d´élever au carré.

$4\sqrt{x+2} = x+5$ Signifie que : $\left(4\sqrt{x+2}\right)^2 = (x+5)^2$ et $x \in [-5, +\infty[$

Signifie que : $16(x+2) = x^2 + 10x + 25$ et $x \in [-5, +\infty[$

Signifie que : $16x+32=x^2+10x+25$ et $x\in[-5,+\infty[$

Signifie que : $x^2-6x-7=0$ et $x\in[-5,+\infty[$

Le discriminant de : $x^2-6x-7=0$ est : $\Delta=(-6)^2-4\times1\times(-6)=64>0$ et ses solutions sont :

$x_1=\dfrac{6-8}{2\times1}=\dfrac{-2}{2}=-1\in D_E$ et $x_2=\dfrac{6+8}{2\times1}=\dfrac{14}{2}=7\notin D_E$

$x^2-6x-7=0$ et $x\in[-5,+\infty[$ Signifie que : $x=-1\in D_E$

Par conséquent : $S=\{-1\}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien