Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°5 :

Equations et inéquations du premier degré et systèmes d'inéquations : partie1

Exercice1 : (*) et (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\sqrt{3}(x+2)=1-x\sqrt{2}$ 2) $\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$ 3) $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-1}=0$

4) $(x+2)\frac{(2x-1)}{3}(x-2)^2=0$ 5) $x^3+27=3x(x+3)$

Corrigé : 1) $\sqrt{3}(x+2)=1-x\sqrt{2}$ Équivaut à : $\sqrt{3}x+2\sqrt{3}=1-\sqrt{2}x$

Équivaut à : $\sqrt{3}x+\sqrt{2}x=1-2\sqrt{3}$

Équivaut à : $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x=1-2\sqrt{3}$

Équivaut à : $x=\frac{1-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\left(1-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\left(1-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

Et par suite l'ensemble des solutions : $S=\left\{\left(1-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right\}$

2) $\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'équation :
Cette l'équation est définie si et seulement si $x-2\neq 0$ et $x+2\neq 0$
Cette l'équation est définie si et seulement si $x\neq 2$ et $x\neq -2$
Donc : $D_E=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

b) Résolvons l'équation : $\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$

$\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$ Équivalent à ; $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-5}{x-2}=0$ On peut réduire au même dénominateur les deux fractions.

Le dénominateur commun est : $(x+2)(x-2)$

$\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$ Équivalent à ; $\frac{(x-1)(x-2)-(x-5)(x+2)}{(x+2)(x-2)}=0$

Équivalent à $\frac{x^2-2x-x+2-x^2-2x+5x+10}{(x+2)(x-2)}=0$ c'est-à-dire : $\frac{12}{(x+2)(x-2)}=0$

Donc : $12=0$ impossible
D'où : $S=\varnothing$

3) $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-1}=0$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

$D_E=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2-1\neq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2-1^2\neq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/(x-1)(x+1)\neq 0\right\}$

$=\left\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0 \ \ et \ \ x+1\neq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq 1 \ \ et \ \ x\neq -1\right\}$

Donc : $D_E=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

b) Résolvons l'équation : $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-1}=0$

Soit ; $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$

$\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-1}=0$ Signifie : $(x-1)(x+2)=0$

Signifie : $x-1=0$ ou $x+2=0$

Signifie : $x=1$ ou $x=-2$ et comme : $1\notin\mathbb{R}-\{-1,1\}$

Alors : $S=\{-2\}$

4) $(x+2)\frac{(2x-1)}{3}(x-2)^2=0$ Signifie : $(x+2)(2x-1)(x-2)^2=0$

Signifie : $x+2=0$ ou $2x-1=0$ ou $(x-2)^2=0$

Signifie : $x=-2$ ou $x=\frac{1}{2}$ ou $x-2=0$

Signifie : $x=-2$ ou $x=\frac{1}{2}$ ou $x=2$

D'où : $S=\left\{-2;\frac{1}{2};2\right\}$

5) $x^3+27=3x(x+3)$ Signifie : $x^3+3^3=3x(x+3)$ on a ; $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

Signifie : $(x+3)(x^2-3x+3^2)-3x(x+3)=0$

Signifie : $(x+3)(x^2-3x+9-3x)=0$

Signifie : $(x+3)(x^2-6x+9)=0$

Signifie : $(x+3)(x-3)^2=0$

Signifie : $x+3=0$ ou $(x-3)^2=0$

Signifie : $x+3=0$ ou $x-3=0$

Signifie : $x=-3$ ou $x=3$

D'où : $S=\{-3;3\}$

Exercice2: (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\frac{(2-6x)(3x+12)}{x+2}=0$ 2) $\frac{(x-3)(2x-8)}{16x^2-25}=0$ 3) $\frac{x^2-16}{x+4}=0$

Corrigé :1) $\frac{(2-6x)(3x+12)}{x+2}=0$

a) On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette l'équation est définie si et seulement si $x+2\neq 0$

Donc : $D_E=\mathbb{R}-\{-2\}$

b) Résolvons l'équation :

$\frac{(2-6x)(3x+12)}{x+2}=0$ Signifie : $(2-6x)(3x+12)=0$

Signifie : $2-6x=0$ ou $3x+12=0$

Signifie : $x=\frac{1}{3}\in D_E$ ou $x=-4\in D_E$ et par suite : $S=\left\{-4;\frac{1}{3}\right\}$

2) $\frac{(x-3)(2x-8)}{16x^2-25}=0$

On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette l'équation est définie si et seulement si $16x^2-25\neq 0$

$16x^2-25=0$ Signifie : $x^2=\frac{25}{16}$ signifie : $x=\frac{5}{4}$ ou $x=-\frac{5}{4}$

Donc : $D_E=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right\}$

b) Résolvons l'équation :

$\frac{(x-3)(2x-8)}{16x^2-25}=0$ Signifie : $(x-3)(2x-8)=0$

Signifie : $x-3=0$ ou $2x-8=0$

Signifie : $x=3\in D_E$ ou $x=4\in D_E$ et par suite : $S=\{3;4\}$

3) $\frac{x^2-16}{x+4}=0$

On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette l'équation est définie si et seulement si $x+4\neq 0$

$x+4=0$ Signifie : $x=-4$

Donc : $D_E=\mathbb{R}-\{-4\}$

b) Résolvons l'équation : $\frac{x^2-16}{x+4}=0$ Signifie : $x^2-16=0$ Signifie : $x^2-4^2=0$

Signifie : $x-4=0$ ou $x+4=0$

Signifie : $x=-4\notin D_E$ ou $x=4\in D_E$ et par suite : $S=\{4\}$

Exercice3 : La somme des âges de Samira, de sa mère et de sa grand-mère est 90 ans. La grand-mère a le double de l'âge de la mère et l'âge de Samira est le tiers de celui de sa mère. Quel est l'âge de chacune ?

Corrigé : Choix de l'inconnue

Soit x l'âge de la mère

Alors, l'âge de la grand-mère est $2x$ et celui de Marie est $\frac{1}{3}x$.

L'équation est donc : $x+2x+\frac{1}{3}x=90$

La solution est $x=27$. Déduisez-en les 3 âges !

Soit à partir de 100 minutes de communication.

Exercice4 : (**) (***) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $|x-2|=4$ 2) $|x+5|=-3$

3) $|x+3|\leq 2$ 4) $|x-1|>5$ 5) $|3x-1|=|5x+2|$ 6) $|x+1|=4-|3x+2|$

7) $|x^2-2x+3|=2$

Corrigé : 1) On a les équivalences suivantes :

$|x-2|=4$ Signifie que : $x-2=4$ ou $x-2=-4$

Signifie que : $x=6$ ou $x=-2$

Donc : $S=\{-2;6\}$

2) $|x+5|=-3$

Une valeur absolue ne peut pas être strictement négative :Donc : $S=\varnothing$

3) **Règle :** $|x-a|\leq r$ **est équivalente à :** $-r\leq x-a\leq r$ avec $r>0$

D'après notre règle, on a donc :

$|x+3|\leq 2$ Signifie que : $-2\leq x+3\leq 2$

Signifie que : $-2-3\leq x+3-3\leq 2-3$

Signifie que : $-5\leq x\leq -1$

Donc : $S=[-5;-1]$

4) $|x-1|>5$

Règle : $|x-a|>r$ **est équivalente à :** $x-a>r$ ou $x-a<-r$ avec $r>0$

$|x-1|>5$ Signifie que : $x-1>5$ ou $x-1<-5$

Signifie que : $x>6$ ou $x<-4$ Donc : $S=]-\infty;-4[\cup]6;+\infty[$

5) $|3x-1|=|5x+2|$

Égalité de deux valeurs absolues :
Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b
Cela découle du fait que par exemple |5| = |−5|

$|3x-1|=|5x+2|$ Signifie que : $3x-1=5x+2$ ou $3x-1=-(5x+2)$

Signifie que : $3x-5x=2+1$ ou $3x-1=-5x-2$
Signifie que : $-2x=3$ ou $8x=-1$

Signifie que : $x=-\frac{3}{2}$ ou $x=-\frac{1}{8}$

Donc : $S=\left\{-\frac{3}{2};-\frac{1}{8}\right\}$

6) $|x+1|=4-|3x+2|$

On a les équivalences suivantes :
$x+1\geq 0$ Signifie que : $x\geq -1$

$3x+2\geq 0$ Signifie que : $x\geq -\frac{2}{3}$

On distingue alors trois cas :

• Sur : $]-\infty;-1]$: $|x+1|=4-|3x+2|$ Signifie que : $-(x+1)=4-(-(3x+2))$

Signifie que : $-x-1=4+3x+2$
Signifie que : $-4x=7$

Signifie que : $x=-\frac{7}{4}\in]-\infty;-1]$

• Sur : $\left[-1;-\frac{2}{3}\right[$: $|x+1|=4-|3x+2|$ Signifie que : $x+1=4-(-(3x+2))$

Signifie que : $x+1=4+3x+2$ Signifie que : $-2x=5$

Signifie que : $x=-\frac{5}{2}\notin\left[-1;-\frac{2}{3}\right[$

• Sur : $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right[$: $|x+1|=4-|3x+2|$ Signifie que : $x+1=4-(3x+2)$

Signifie que : $x+1=4-3x-2$ Signifie que : $4x=1$

Signifie que : $x=\frac{1}{4}\in\left[-\frac{2}{3};+\infty\right[$

Au final : $S=\left\{-\frac{7}{4};\frac{1}{4}\right\}$

7) (E) ; $|x^2-2x+3|=2$

$|x^2-2x+3|=2$ Signifie que : $x^2-2x+3=2$ ou $x^2-2x+3=-2$

• Résolution de $x^2-2x+3=2$
$x^2-2x+3=2$ Signifie que : $x^2-2x+1=0$

Signifie que : $(x-1)^2=0$

Signifie que : $x-1=0$

Signifie que : $x=1$

La seule solution de $x^2-2x+3=2$ est 1.

• Résolution de $x^2-2x+3=-2$.

$x^2-2x+3=-2$ Signifie que : $x^2-2x+5=0$

On calcule son discriminant : $\Delta=-16$.

Ainsi l'équation $x^2-2x+5=0$ n'a aucune solution réelle

Au final, l'ensemble solution de (E) est S = {1}.

Exercice5 : (***) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $|x-2|-|4-x|-1=0$ 2) $|x+1|+|x-2|=|x-3|$

Corrigé : 1) $|x-2|-|4-x|-1=0$

$x-2=0$ Signifie que : $x=2$

$4-x=0$ Signifie que : $x=4$

x	$-\infty$ 2	4	$+\infty$
$x-2$	$-$ 0	$+$	$+$
$\|x-2\|$	$-x+2$	$x-2$	$x-2$
$4-x$	$+$	$+$ 0	$-$
$\|x+2\|$	$4-x$	$4-x$	$x-4$
$\|x-2\|-\|4-x\|-1$	-3	$2x-7$	1

Si : $x\leq 2$ alors :

$|x-2|-|4-x|-1=0$ devient :

$-3=0$ impossible donc : $S_1=\varnothing$

Si : $2\leq x\leq 4$ alors : l'équation devient : $2x-7=0$ Ce qui Signifie que : $x=\frac{7}{2}\in[2;4]$

Donc : $S_2=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

Si : $x\geq 4$ alors : l'équation devient $1=0$ impossible donc : $S_3=\varnothing$

Par conséquent : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

2) $|x+1|+|x-2|=|x-3|$

$x+1=0$ Signifie que : $x=-1$

$x-2=0$ Signifie que : $x=2$

$x-3=0$ Signifie que : $x=3$

x	$-\infty$ -1	2	3	$+\infty$
$x+1$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$ 0	$+$

Si : $x\leq -1$ alors : l'équation devient : $-(x+1)-(x-2)=-(x-3)$

Signifie que : $-x-1-x+2=-x+3$

Signifie que : $x=-2\leq -1$

Donc : $S_1=\{-2\}$

Si : $-1\leq x\leq 2$ alors : l'équation devient : $(x+1)-(x-2)=-(x-3)$

Ce qui Signifie que : $x+1-x+2=-x+3$

Signifie que : $x=0\in[-1;2]$ Donc : $S_2=\{0\}$

Si : $2\leq x\leq 3$ alors : l'équation devient : $(x+1)+(x-2)=-(x-3)$

Ce qui Signifie que : $x+1+x-2=-x+3$

Signifie que : $3x=4$

Signifie que : $x=\frac{4}{3}\notin[2;3]$ Donc : $S_3=\varnothing$

Si : $x\geq 3$ alors : l'équation devient $x+1+x-2=x-3$

Signifie que : $x=-2\notin[3;+\infty[$ donc : $S_4=\varnothing$

Par conséquent : $S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4=\{-2;0\}$

Exercice6 : (***) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre m l'équation suivante :

$\frac{2x-1}{x-m}=m$

Corrigé : ● 1. On va déterminer le domaine de définition de l'équation :
Cette équation est définie si et seulement si $x-m\neq 0$ qui signifie que : $x\neq m$
Donc : le domaine de définition de l'équation est : $D_E=\mathbb{R}-\{m\}$

● 2. On résoud l'équation : $\frac{2x-1}{x-m}=m$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{m\}$: on va écrire cette équation sous la forme : $ax=b$

$\frac{2x-1}{x-m}=m$ Signifie que : $2x-1=m(x-m)$ Signifie que : $2x-1=mx-m^2$

Signifie que : $2x-mx=1-m^2$

Signifie que : $(2-m)x=1-m^2$

1ére cas : $m\neq 2$: Alors : $2-m\neq 0$

Alors : $\frac{2x-1}{x-m}=m$ Équivalent à : $x=\frac{1-m^2}{2-m}$

Donc : L'équation admet une solution unique : $x=\frac{1-m^2}{2-m}$

Par suite : $S=\left\{\frac{1-m^2}{2-m}\right\}$

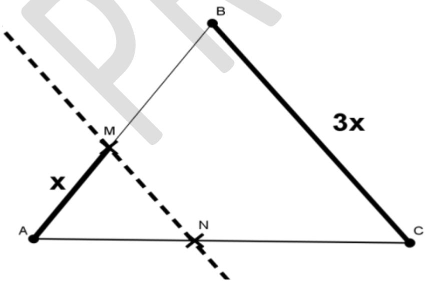
2ére cas : $m=2$: L'équation devient : $0x=1-2^2$ Équivalent à : $0=-3$
Donc : $S=\varnothing$

Exercice7: (***) Soit ABC un triangle et les droites : (AB) et (MN)sont parallèles et on pose : $AM=x\ cm$ et $BC=3x\ cm$ et $MN=6\ cm$ et $AN=8\ cm$ (Voir la figure)

1) Montrer que le périmètre du triangle ABC est : $P(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+14x\right)$

2) Existe-t-ils des valeurs de x pour que le périmètre du Triangle ABC est : 18cm

Corrigé :



1) Dans le triangle ABC on a : (AB) $\parallel$ (MN)
Donc d'après le théorème de Thalès direct en a :

$\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}=\frac{BC}{MN}=\frac{3x}{6}=\frac{x}{2}$ Donc : $\frac{AB}{AM}=\frac{x}{2}$ c'est-à-dire : $AB=\frac{x}{2}AM$

Et on a aussi : $\frac{AC}{AN}=\frac{x}{2}$ c'est-à-dire : $AC=\frac{x}{2}AN$

Et puisque : $AM=x\ cm$ et $AN=8\ cm$ alors : $AB=\frac{x^2}{2}$ et $AC=4x$

Le périmètre du triangle ABC est donc: $P(x)=AB+AC+BC=\frac{x^2}{2}+4x+3x=\frac{x^2}{2}+7x=\frac{1}{2}\left(x^2+14x\right)$

2) Il suffit de résoudre l'équation : $P(x)=36$

$\frac{1}{2}\left(x^2+14x\right)=36$ Équivalent à : $x^2+14x-72=0$

Équivalent à : $x^2+2\times7x+7^2-7^2-72=0$ c'est-à-dire : $\left(x+7\right)^2-121=0$

Équivalent à : $\left(x+7\right)^2=121$

Équivalent à : $x+7=\sqrt{121}=11$ ou $x+7=-\sqrt{121}=-11$

Équivalent à : $x=4$ ou $x=-18\prec0$ impossible

Donc : $x=4$ par suite : $AM=4\ cm$ et $AB=\frac{x}{2}AM=8$ et $AC=\frac{x}{2}AN=16$ et $AN=8\ cm$

Donc : le point M est le milieu du segment $\left[AB\right]$ et le point N est le milieu du segment $\left[AC\right]$

Exercice8 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes. On donnera la réponse sous forme d'intervalle

1) $2-5x\geq4+3x$ 2) $2\left(4x-3\right)-3\left(2x+1\right)>-x+2$ 3) $\frac{x-3}{6}+\frac{x+7}{2}>2x-9$

4) $\frac{3\left(2x+1\right)}{6}-\frac{5x+3}{2}+5\leq\frac{-x+4}{8}$ 5) $\left(2x+1\right)\left(9-3x\right)+2\leq\left(6x-1\right)\left(1-x\right)$

6) $\frac{1-3x}{2}+\frac{9x-1}{4}<\frac{3x-5}{4}$

Corrigé :

1) $2-5x\geq4+3x$ Signifie que : $-5x-3x\geq-2+4$

Signifie que : $-8x\geq2$

Signifie que : $x\leq\frac{2}{-8}$

Signifie que : $x\leq-\frac{1}{4}$

Donc : $S=\left]-\infty,-\frac{1}{4}\right]$

2) $2\left(4x-3\right)-3\left(2x+1\right)>-x+2$ Signifie que : $8x-6-6x-3>-x+2$

Signifie que : $8x-6x+x>2+3+6$

Signifie que : $3x>11$

Signifie que : $x>\frac{11}{3}$

Donc : $S=\left]\frac{11}{3},+\infty\right[$

3) $\frac{x-3}{6}+\frac{x+7}{2}>2x-9$ Signifie que : $\frac{x-3}{6}+\frac{3\left(x+7\right)}{6}>\frac{6\left(2x-9\right)}{6}$

Signifie que : $\frac{x-3+3x+21}{6}>\frac{12x-54}{6}$

Signifie que : $\frac{4x+21}{6}>\frac{12x-54}{6}$

Signifie que : $4x+21>12x-54$

Signifie que : $4x-12x>-54-21$

Signifie que : $-8x>-72$ Signifie que : $x<\frac{-72}{-8}$

Signifie que : $x<9$

Donc : $S=]-\infty,9[$

4) $\frac{3(2x+1)}{6}-\frac{5x+3}{2}+5\leq\frac{-x+4}{8}$ Signifie que : $(\times 16)$: $12(2x+1)-(5x+3)+80\leq 2(-x+4)$

Signifie que : $24x+12-5x-3+80\leq -2x+8$

Signifie que : $24x-5x+2x\leq 8-12-80+3$

Signifie que : $21x\leq -81$ Signifie que : $x\leq -\frac{81}{21}$

Signifie que : $x\leq -\frac{27}{7}$

Donc : $S=\left]-\infty,-\frac{27}{7}\right]$

5) $(2x+1)(9-3x)+2\leq(6x-1)(1-x)$ Signifie que : $18x-6x^2+9-3x+2\leq 6x-6x^2-1+x$

Signifie que : $18x-6x^2+9-3x+2\leq 6x-6x^2-1+x$

Signifie que : $18x-3x-6x-x\leq -1-9-2$

Signifie que : $8x\leq -12$ Signifie que : $x\leq\frac{-12}{8}$

Signifie que : $x\leq -\frac{3}{2}$ Donc : $S=\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right]$

6) $\frac{1-3x}{2}+\frac{9x-1}{4}<\frac{3x-5}{4}$ Signifie que : $(\times 4)$: $2-6x+9x-1<3x-5$

Signifie que : $-6x+9x-3x<-5+1-2$

Signifie que : $0x<-6$ impossible

Donc : $S=\varnothing$

Exercice9 : (**) Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1) (E) : $\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{3}$ 2) (I) : $\frac{x}{2x+1}\leq\frac{1}{3}$

Corrigé : 1) $\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{3}$

● On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette équation est définie si et seulement si $2x+1\neq 0$ qui signifie que : $x\neq -\frac{1}{2}$

Donc : le domaine de définition de l'équation est : $D_E=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

● On résoud l'équation : $\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{3}$; soit ; $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$\dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{1}{3}$ si et seulement si : $3x=2x+1$ Si et seulement si : $x=1\in\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

Ainsi, l'ensemble solution de (E) est : $S=\{1\}$

2) $\dfrac{x}{2x+1}\le\dfrac{1}{3}$

● On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :

Cette inéquation est définie si et seulement si $2x+1\neq 0$ qui signifie que : $x\neq-\dfrac{1}{2}$

Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

● On résoud l'inéquation : $\dfrac{x}{2x+1}\le\dfrac{1}{3}$; soit ; $x\in\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

$\dfrac{x}{2x+1}\le\dfrac{1}{3}$ si et seulement si : $\dfrac{x}{2x+1}-\dfrac{1}{3}\le 0$

Si et seulement si : $\dfrac{3x-2x-1}{3(2x+1)}\le 0$ Si et seulement si : $\dfrac{x-1}{3(2x+1)}\le 0$

Le signe de : $\dfrac{x-1}{3(2x+1)}$ dépend du signe des expression : $2x+1$ *et* $x-1$

$x-1=0$ Signifie que : $x=1$ et $2x+1=0$ Signifie que : $x=-\dfrac{1}{2}$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$3(2x+1)$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-1}{3(2x+1)}$	$+$	‖	$-$	0	$+$

Donc : $S=\left]-\dfrac{1}{2},1\right]$

Exercice10 : (**) Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ à l'aide d'un tableau de signes. Il est parfois nécessaire de factoriser l'expression

1) $(2x-3)(1-7x)<0$ 2) $x(5x-1)-3x(x-4)\le 0$ 3) $(4x^2-9)(x-1)\ge 0$

4) $\dfrac{7-2x}{2-x}\le 0$ 5) $\dfrac{2x+1}{x+2}\ge 1$

Corrigé : 1) $(2x-3)(1-7x)<0$

Valeurs frontières : $2x-3=0$ Signifie que : $x=\dfrac{3}{2}$ $1-7x=0$ Signifie que : $x=\dfrac{1}{7}$

On peut alors dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$	$\frac{1}{7}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$1-7x$	$+$	0	$-$		$-$
$(2x-3)(1-7x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc : $S=\left]-\infty,\frac{1}{7}\right[\cup\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$

2) $x(5x-1)-3x(x-4)\leq 0$ on factorise

$x(5x-1)-3x(x-4)\leq 0$ Signifie que : $x\left[(5x-1)-3(x-4)\right]\leq 0$

Signifie que : $x(5x-1-3x+12)\leq 0$

Signifie que : $x(2x+11)\leq 0$

Valeurs frontières : $2x+11=0$ Signifie que : $x=-\frac{11}{2}$ et $x=0$

On peut alors dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{11}{2}$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+11$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(2x+11)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left[-\frac{11}{2};0\right]$

3) $(4x^2-9)(x-1)\geq 0$ on factorise

$(4x^2-9)(x-1)\geq 0$ Signifie que : $(2x-3)(2x+3)(x-1)\geq 0$

Valeurs frontières : $2x+3=0$ Signifie que : $x=-\frac{3}{2}$ et $2x-3=0$ Signifie que : $x=\frac{3}{2}$

$x-1=0$ Signifie que : $x=1$

On peut alors dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-3)(2x+3)(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left[-\frac{3}{2},1\right]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$

4) $\frac{7-2x}{2-x}\leq 0$

● On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :
Cette équation est définie si et seulement si $2-x\neq 0$ qui signifie que : $x\neq 2$
Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\{2\}$

● On résoud l'inéquation : $\frac{7-2x}{2-x}\leq 0$

Valeurs frontières : $7-2x=0$ Signifie que : $x=\frac{7}{2}$ et $2-x=0$ Signifie que : $x=2$

On peut alors dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$	2		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$7-2x$	$+$		$+$	0	$-$	
$2-x$	$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{7-2x}{2-x}$	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]2;\frac{7}{2}\right]$

5) $\frac{2x+1}{x+2}\geq 1$

● On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :
Cette équation est définie si et seulement si $x+2\neq 0$ qui signifie que : $x\neq -2$
Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\{-2\}$

● On résoud l'inéquation : $\frac{2x+1}{x+2}\geq 1$ On annule le second membre :

$\frac{2x+1}{x+2}\geq 1$ Signifie que : $\frac{2x+1}{x+2}-1\geq 0$

Signifie que : $\frac{2x+1-x-2}{x+2}\geq 0$ Signifie que : $\frac{x-1}{x+2}\geq 0$

Valeurs frontières : $x-1=0$ Signifie que : $x=1$ et $x+2=0$ Signifie que : $x=-2$

x	$-\infty$	-2		1		$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{x+2}$	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Donc : $S=]-\infty,-2[\cup[1,+\infty[$

Exercice11 : (**)
Voici les tarifs annuels de l'eau dans deux communes :
• La commune A facture un abonnement annuel de 32 DH puis 1,13 DH le m^3 d'eau consommé
• La commune B facture un abonnement annuel de 14 DH puis 1,72 DH le m^3 d'eau consommé
À partir de quelle consommation d'eau au dixième de m^3 près, le tarif de la commune A est-il plus avantageux que le tarif de la commune B ?

Corrigé : Soit x le nombre de m^3 d'eau consommés.
Le coût de la commune A serait égal à : $1{,}13x+32$.
Le coût de la commune B serait égal à : $1{,}72x+14$.
La question posée revient à résoudre : $1{,}13x+32<1{,}72x+14\Leftrightarrow 1{,}13x-1{,}72x<14-32$

$\Leftrightarrow -0{,}59x<-18\Leftrightarrow x>\frac{-18}{-0{,}59}\Leftrightarrow x>30{,}5$

Le tarif de la commune A est plus avantageux que le tarif de la commune B à partir de 30,6 m^3 d'eau consommés.

Exercice12 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes :
1) $2x-y+1=2y-2x+5$ 2) $x+5=y+5$

Corrigé : 1) On a $2x-y+1=2y-2x+5$ équivalent à : $4x-3y-4=0$

Équivalent à : $4x=3y+4$ équivalent à : $x=\frac{3}{4}y+1$

Donc : $S=\left\{\left(\frac{3}{4}y+1;y\right)/\ y\in\mathbb{R}\right\}$

2) On a $x+5=y+5$ équivalent à : $y=x$

Donc : $S=\{(x;x)/\ x\in\mathbb{R}\}$

Exercice13 : (**) Résoudre Dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation : $3x-4y>0$

Corrigé : De l'inéquation précédente on en déduit : l'équation de la droite (D) : $3x-4y=0$

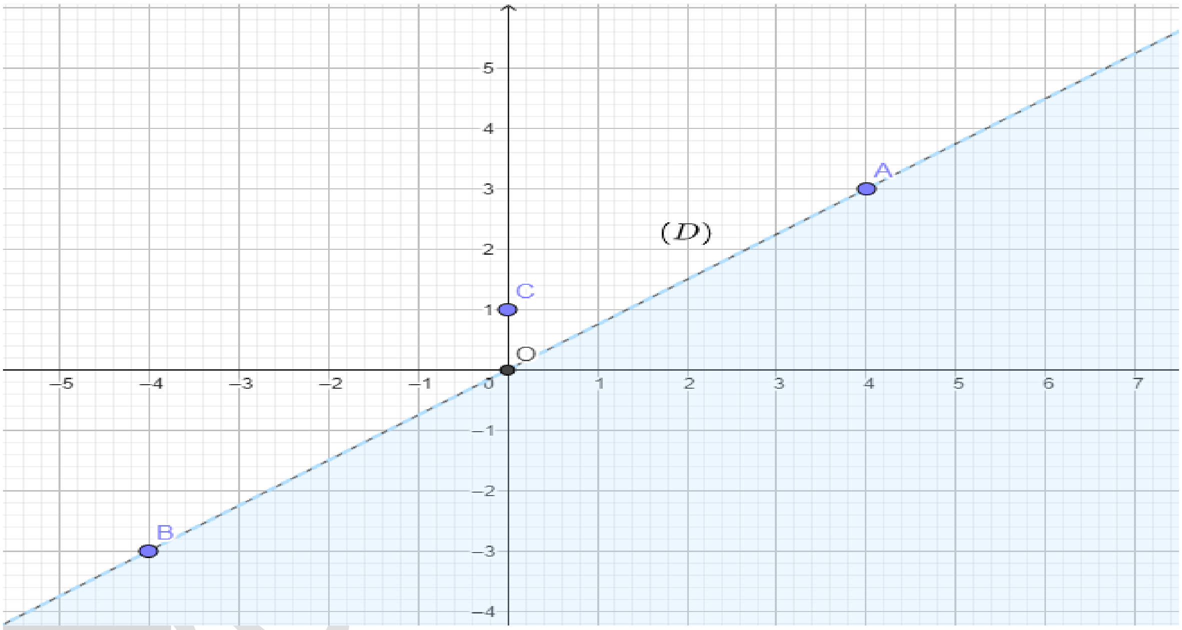
Cette droite passe par les points $A(4;3)$ et $B(-4;-3)$ et détermine deux demi-plans P_1 et P_2

(Il nous reste à trouver lequel des deux demis plans qui est la Solution de l'inéquation.)
(Nous choisissons un point pris dans l'un des demi-plans, relevons ses coordonnées et nous contrôlons si ce point vérifie l'inéquation.
Conseil : On choisit, de référence, le point « O » de coordonnées (0 ; 0) ; c'est-à-dire x= 0 et y = 0 . Les calculs sont donc simplifiés.
Puisque la droite passe par « O », on prendra un autre point

Soit $C(0;1)$ On a $3\times0-4\times1=-4\leq0$

Donc : les coordonnes $(0;1)$ ne vérifie pas l'inéquation.

Donc les Solutions de l'inéquation $3x-4y>0$ est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du demi- plan P_1 colorée en bleu qui ne contient pas le point $C(0;1)$ et privé de la droite (D)



Exercice14 : (***) Résoudre Dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inéquations suivant : $(S)\ \begin{cases}2x+y-3\geq0\\-x+y+5\leq0\\x\leq4\end{cases}$

Corrigé : L'équation de la droite (D_1) : $2x+y-3=0$

L'équation de la droite (D_2) : $-x+y+5=0$

L'équation de la droite (D_3) : $x-4=0$

Soit $O(0;0)$ On a $2\times0+0-3\geq0$ Équivalent à : $-3\geq0$

Donc : les coordonnes $O(0;0)$ ne vérifie pas l'inéquation. $2x+y-3\geq0$

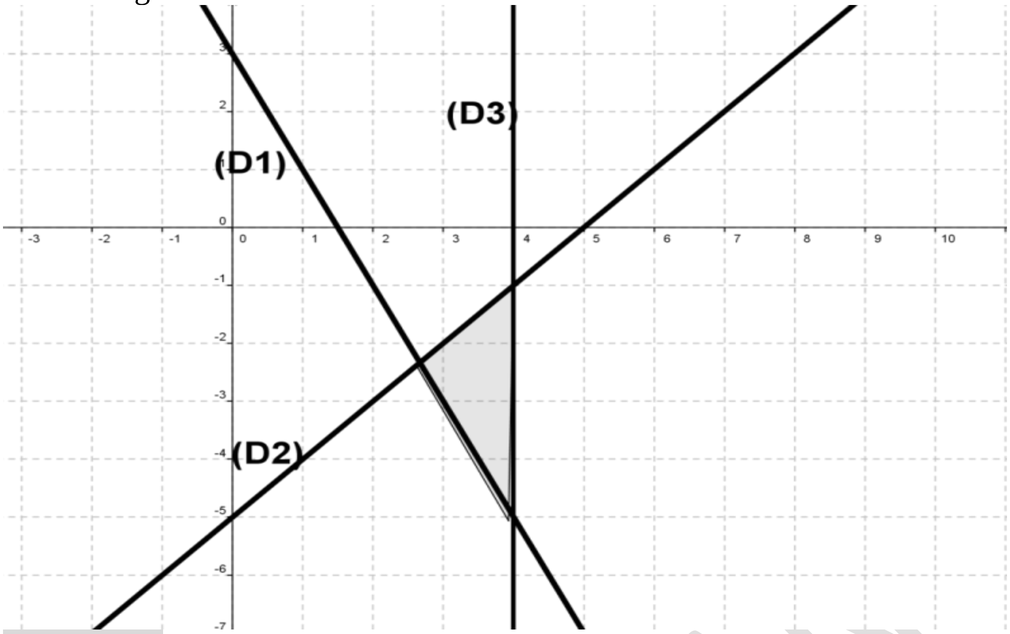
Soit $O(0;0)$ On a $-0+0+5\leq0$ Équivalent à : $5\leq0$

Donc : les coordonnes $O(0;0)$ ne vérifie pas l'inéquation. $-x+y+5\leq 0$

Soit $O(0;0)$ On a $0\leq 4$ Donc : les coordonnes $O(0;0)$ vérifie l'inéquation. $x\leq 4$

Donc les Solutions du système est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du plan coloré

Voire la figure ci-dessous.



Exercice15: (***) On désire acheter pour une bibliothèque des livres de maths (60 dh l'un) et des encyclopédies (120dh l'une).

On exige les trois conditions suivantes :

1°) Au moins deux livres de maths

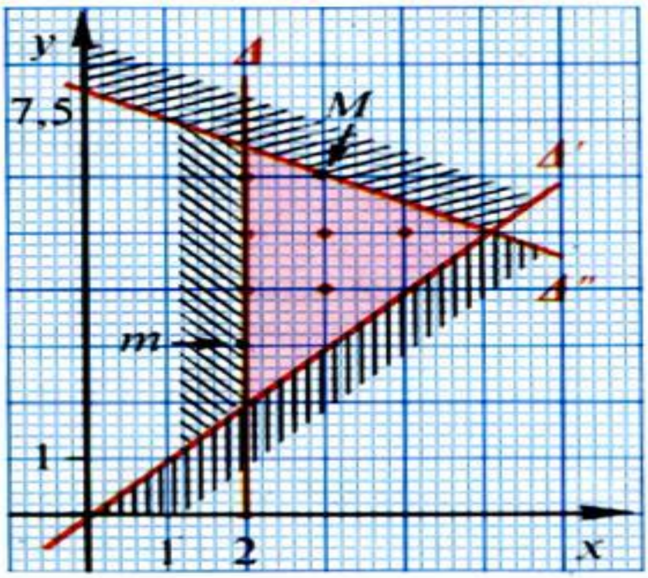
2°) Plus d'encyclopédies que des livres de maths

3°) La dépense doit être inférieure ou égale à 900 DH.

Quelles sont les diverses possibilités d'achats ?

Corrigé : Désignons par « x » le nombre de livres de maths (nombre entier) et « y » le nombre d'encyclopédies (nombre entier) alors les trois contraintes donnent le système suivant :

$$\begin{cases} x\geq 2 \\ y\succ x \\ 60x+120y\leq 900 \end{cases} \quad \text{D'où : } \begin{cases} x\geq 2 \\ y\succ x \\ y\leq -0,5x+7,5 \end{cases}$$



Nous devons tracer les droites :

$$\begin{cases} (\Delta): x=2 \\ (\Delta'): y=x \\ (\Delta''): y=-0,5x+7,5 \end{cases}$$

Etude du graphique : Le graphique montre « 8 » solutions répondant au problème.

Remarque :Le point « M » (3 livres de maths , 6 encyclopédies) correspond à la dépense maximale De 900 DH.

Le point « m » (2 livres de maths, 3 encyclopédies) correspond à la dépense minimale de 480 dh

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien