Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°5 :

Equations et inéquations et systèmes partie3 : Equation du second degré

Exercice1 : (*) et (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :1) $x^2+23=32$ 2) $(x+1)^2+23=20$

3) $23-(x+1)^2=-13$ 4) $25x^3-16x=0$ 5) $-3x^2-x-3=0$ (on peut utiliser l'écriture canonique)

6) $(x-2)(x+4)=-9$

Solution :1) L'équation : $x^2+23=32$

$x^2+23=32$ Signifie que : $x^2=9$

9 est positif donc l'équation admet deux solutions $x=\sqrt{9}=3$ et. $x=-\sqrt{9}=-3$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-3;3\}$

2) L'équation : $(x+1)^2+23=20$

$(x+1)^2+23=20$ Signifie que : $(x+1)^2=-3$ impossible car : -10 est négatif

Donc : l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Donc : $S=\varnothing$

3) L'équation : $23-(x+1)^2=-13$

$23-(x+1)^2=-13$ Signifie que : $23+13=(x+1)^2$ Signifie que : $(x+1)^2=36$

Signifie que : $x+1=\sqrt{36}$ ou $x+1=-\sqrt{36}$

Signifie que : $x+1=6$ ou $x+1=-6$

Signifie que : $x=5$ ou $x=-7$

L'équation admet deux solutions $x=5$ ou $x=-7$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-7;5\}$

4) $25x^3-16x=0$ Signifie que : $x(25x^2-16)=0$

Signifie que : $x=0$ ou $25x^2-16=0$

Signifie que : $x=0$ ou $(5x)^2-4^2=0$

Signifie que : $x=0$ ou $(5x-4)(5x+4)=0$

Signifie que : $x=0$ ou $5x-4=0$ ou $5x+4=0$

Signifie que : $x=0$ ou $x=\frac{4}{5}$ ou $x=-\frac{4}{5}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{0;-\frac{4}{5};\frac{4}{5}\right\}$

5) $-3x^2-x-3=0$: On va d'abord déterminer la forme canonique du trinôme $-3x^2-x-3=ax^2+bx+c$

$-3x^2-x-3=-3\left(x^2+\frac{1}{3}x\right)-3$ on factorise par : $a=-3$

$=-3\left[\left(x^2+2\times x\times\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2\right)-\left(\frac{1}{6}\right)^2\right]-3$: on remarque une identité remarquable :

$$=-3\left[\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{36}\right]-3=-3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{3}{36}-3=-3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{35}{12}$$

$-3x^2-x-3=-3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{35}{12}$ Cette écriture s'appelle la forme canonique de $-3x^2-x-3$

$-3x^2-x-3=0$ Signifie que : $-3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{35}{12}=0$ Signifie que : $-3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2=\frac{35}{12}$ Signifie que : $\left(x+\frac{1}{6}\right)^2=-\frac{35}{36}<0$

Donc : l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Donc : $S=\varnothing$

6) $(x-2)(x+4)=-9$ Signifie que : $x^2-2x+4x-8=-9$

Signifie que : $x^2+2x+1=0$

Signifie que : $x^2+2\times x\times1+1^2=0$ Signifie que : $(x+1)^2=0$

Signifie que : $x+1=0$

Signifie que : $x=-1$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-1\}$

Exercice2 : (**) écrire sous la forme canonique les trinômes suivants :

1) $P(x)=x^2-4x+5$ 2) $Q(x)=x^2+8x+1$ 3) $R(x)=x^2-6x-7$

Corrigé : On cherche la forme canonique :

1) $P(x)=x^2-4x+5$

$P(x)=x^2-4x+5=x^2-2\times x\times2+2^2-2^2+5$

$P(x)=(x-2)^2-4+5$

$\boxed{P(x)=(x-2)^2+1}$

2) $Q(x)=x^2+8x+1$

$Q(x)=x^2+8x+1=x^2-2\times x\times4+4^2-4^2+1$

$Q(x)=(x-4)^2-16+1$

$\boxed{Q(x)=(x-4)^2-15}$

3) $R(x)=x^2-6x-7$

$R(x)=x^2-6x-7=x^2-2\times x\times3+3^2-3^2-7$

$R(x)=(x-3)^2-9-7$

$\boxed{R(x)=(x-3)^2-16}$

Exercice3 : (*) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations $P(x)=0$ et factoriser le trinôme $P(x)$:

a) $P(x)=x^2-5x+6$ b) $P(x)=2x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{18}$ c) $P(x)=5x^2-3x+1$

Solution : a) $P(x)=x^2-5x+6$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2-5x+6=0$: $a=1$; $b=-5$; $c=6$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-5)^2-4\times1\times6=25-24=1>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{4}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{6}{2} = 3$ donc : $S = \{2;3\}$

Et le trinôme $P(x) = x^2 - 5x + 6$ a une forme factorisée : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

C'est-à-dire : $x^2 - 5x + 6 = 1(x-1)(x-2) = (x-1)(x-2)$

b) $P(x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{18}$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{18} = 0$: $a = 2$; $b = -\frac{2}{3}$; $c = \frac{1}{18}$

Donc : $\Delta = b^2 - 4\times a\times c = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\times 2\times \frac{1}{18} = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = 0$

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{2}{3}}{2\times 2} = \frac{1}{6}$

Donc : $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$ et le trinôme $P(x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{18}$ a une forme factorisée : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

$2x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{18} = 2\left(x - \frac{1}{6}\right)^2$

c) $P(x) = 5x^2 - 3x + 1$

Calculons le discriminant de l'équation $5x^2 - 3x + 1 = 0$: $a = 5$; $b = -3$; $c = 1$

Donc : $\Delta = b^2 - 4\times a\times c = (-3)^2 - 4\times 5\times 1 = 9 - 20 = -11 < 0$

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle c'est-à-dire : $S = \varnothing$

Et le trinôme $P(x) = 5x^2 - 3x + 1$ ne peut pas être factorisée

Exercice4 : (*) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $6x^2 - 7x - 5 = 0$ 2) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ 3) $3x^2 + x + 2 = 0$

Solution : 1) $a = 6$ et $b = -7$ et $c = -5$ $6x^2 - 7x - 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4\times 6\times(-5) = 49 + 120 = 169 = (13)^2 > 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-(-7)+\sqrt{169}}{2\times 6} = \frac{7+13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ et $x_2 = \frac{7-13}{12} = \frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$

Donc : $S = \left\{\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}\right\}$

2) $a = 2$; $b = -2\sqrt{2}$; $c = 1$ $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-2\sqrt{2}\right)^2 - 4\times 2\times 1 = 8 - 8 = 0$

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-\left(-2\sqrt{2}\right)}{2\times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Donc : $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

3) $3x^2 + x + 2 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4\times 3\times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle c'est-à-dire : $S = \varnothing$

Exercice5 : (**)

Déterminez le nombre positif dont le carré est plus grand de 15 que le double de sa valeur.

Solution :

La première chose que nous devons faire est de traduire le problème sous la forme d'une équation. Soit x le nombre que nous essayons de trouver. La première information qui nous est donnée est que x est positif ; c'est-à-dire $x>0$.Deuxièmement, on nous dit que le carré du nombre, x^2, dépasse le double de sa valeur, $2x$, de 15. Cela signifie que la différence entre x^2 et $2x$ vaut 15. Par conséquent, $x^2-2x=15$ C'est-à-dire : $x^2-2x-15=0$

Calculons le discriminant de : $x^2-2x-15=0$: $a=1$; $b=-2$; $c=-15$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-2)^2-4\times1\times(-15)=4+60=64=8^2>0$

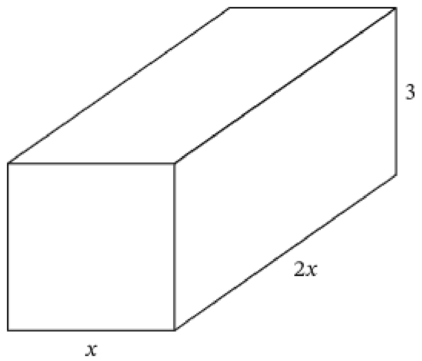
Comme $\Delta>0$, trinôme possède deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{2-\sqrt{64}}{2a}=\frac{2-8}{2\times1}=-3<0 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{2+\sqrt{64}}{2a}=\frac{2+8}{2\times1}=5>0$$

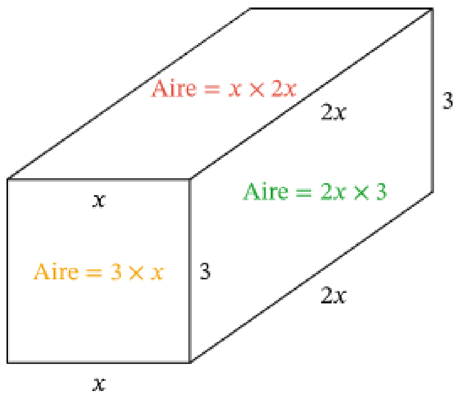
Cependant, on nous a dit que nous recherchons un nombre positif ; par conséquent, la solution est 5.

Exercice6 : (**)

Le schéma montre un prisme rectangulaire, avec une aire égale à 580. Déterminez la valeur de x.



Solution : On note d'abord que l'aire de ce prisme rectangulaire sera la même que son l'aire de sa surface. En d'autres termes, la somme de l'aire des faces du prisme rectangulaire est de 580 unités carrées. Nous devons commencer par trouver une expression pour cette somme. Pour ce faire, nous notons qu'il y a 6 faces et que les faces opposées ont la même aire. Enfin, nous savons que chaque face est un rectangle ou un carré, l'aire de chaque face est donc égale à la longueur multipliée par la largeur. Cela nous permet de déterminer l'aire de chaque face comme suit.



La longueur de la face avant est de x et sa largeur est de 3, son aire est donc de $3x$.La longueur de la face supérieure est de x et sa largeur est de $2x$, son aire est donc $x\times2x=2x^2$.La longueur des faces latérales est de $2x$ et Leur largeur est de 3, leur aire est donc $2x\times3=6x$.Puisqu'il y a deux faces à chaque fois, l'aire de la surface est la somme de deux fois chaque expression, ce qui donne : Aire de la surface$=4x^2+18x$

On nous dit que la somme vaut 580, ce qui nous donne l'équation : $4x^2+18x=580$

En calculant chaque racine séparément, on obtient que $x=10$ ou $x=-29/2$.

Comme x représente une longueur, elle doit être positive ; par conséquent, $x=10$.

Exercice7 : (***) Soit le trinôme (E) : $P(x)=2x^2-3x-1$

1) Prouver que le trinôme (E) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha+\beta$; $\alpha\times\beta$; $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$; $\alpha^2+\beta^2$; $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha^3+\beta^3$

Solution : 1) $a=2$: **et** **et** $b=-3$ **et** $c=-1$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times(-1)=9+8=17$

Comme $\Delta>0$: le trinôme (E) a deux racines distinctes : α et β

2) on a : $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ et $\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$ donc $\alpha+\beta=\frac{-(-3)}{2}=\frac{3}{2}$ et $\alpha\times\beta=\frac{-1}{2}$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}}=-3$$

On a : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Donc $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$

Donc $\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}+1=\frac{13}{4}$

On a : $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\frac{13}{4}}{\frac{-1}{2}}=\frac{13}{4}\times(-2)=-\frac{13}{2}$

On sait que : $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{2}=\frac{27}{4}+\frac{9}{4}=\frac{36}{4}=9$

Exercice8 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) ; $x^4-2x^2-1=2$
(On pourra penser à utiliser le changement de variable : $X = x^2$).
Corrigé :1) $x^4-2x^2-1=2$ Equivaut à : $x^4-2x^2-3=0$.
L'équation : $x^4-2x^2-3=0$ Equivaut à : $(x^2)^2-2x^2-3=0$

On pose : $X=x^2$ L'équation : $x^4-2x^2-3=0$ devienne : $X^2-2X-3=0$

Or : $\Delta=16>0$ donc P admet deux solutions distinctes $X_1=-3$ et $X_2=1$

Or $X=x^2\geq0$ donc on ne conserve que la solution positive. $\cancel{X_1=-3}$

Donc : $X=1$ Equivaut à : $x^2=1$ Equivaut à : $x=\sqrt{1}$ ou $x=-\sqrt{1}$ Equivaut à : $x=1$ ou $x=-1$
L'ensemble solution de (E) est donc S = {−1 ; 1}.
Remarque : Les équations de degré 4 ne faisant intervenir que des puissances paires de x sont appelées des Équations bicarrées et se résolvent toujours en faisant le changement de variables $X = x^2$ ce qui permet de se ramener à une équation de degré 2.
Exercice9 : (**) Factoriser les expressions suivantes :

1) $x^2-10x+25$ 2) x^2-3x+2 3) x^4-3x^2+2 4) x^4-4x^2+3

Solution : 1) $x^2-10x+25$ $a=1$ et $b=-10$ et $c=25$ $\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\times1\times(25)=100-100=0$

Puisque : $\Delta=0$ alors le trinôme admet une seule racine double : $x_1=\frac{-(-10)}{2\times1}=\frac{10}{2}=5$

Par suite la factorisation est : $x^2-10x+25=a(x-x_1)^2=1(x-5)^2$

2) x^2-3x+2 : $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times2=9-8=1=(1)^2>0$

Puisque : $\Delta\succ0$ les solutions sont : $x_1=\frac{3+\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{4}{2}=2$ et $x_2=\frac{3-\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$

Par suite la factorisation est : $x^2-3x-2=a(x-x_1)(x-x_2)=1(x-2)(x-1)$

3) x^4-3x^2+2 On pose : $X=x^2$ donc on a : X^2-3X+2 Δ = (-3)^2 – 4 x 1x 2 =9- 8 = 1

Les racines sont : $X_1=\frac{-(-3)+1}{2\times1}=\frac{4}{2}=2$ et $X_2=\frac{-(-3)-1}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$

Par suite la factorisation est : $X^2-3X+2=(X-2)(X-1)$

Or on a : $X=x^2$ Donc : $x^4-3x^2+2=(x^2-2)(x^2-1)$

Cela Signifie que : $x^4-3x^2+2=\left(x^2-\sqrt{2}^2\right)(x^2-1^2)$

Par suite : $x^4-3x^2+2=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)(x-1)(x+1)$

4) x^4-4x^2+3 On pose : $X=x^2$ donc on a : X^2-4X+3

Δ = (-4)^2 – 4 x 1x 3 =16- 12 = 4

Donc : $X_1=\frac{-(-4)+2}{2\times1}=\frac{6}{2}=3$ et $X_2=\frac{-(-4)-2}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$

Donc : $X^2-4X+3=(X-3)(X-1)$ et par suite : $x^4-4x^2+3=(x^2-3)(x^2-1)$

Donc : $x^4-4x^2+3=\left(x^2-\sqrt{3}^2\right)(x^2-1^2)$

Par suite : $x^4-4x^2+3=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)(x-1)(x+1)$

Exercice10 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) (E) : $\frac{x-2}{x-3}=x-1$ 2) (F) : $\frac{x^2-x}{x-1}=2x+3$ 3) (G) : $\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$

Corrigé : 1) (E) $\frac{x-2}{x-3}=x-1$

● 1. On va déterminer le domaine de définition de l'équation :
Cette équation est définie si et seulement si $x-3\neq0$ qui signifie que : $x\neq3$

Donc : le domaine de définition de l'équation est : $D_E=\mathbb{R}-\{3\}$

● 2. On résoud l'équation

$\frac{x-2}{x-3}=x-1$ Signifie que : $x-2=(x-3)(x-1)$

Signifie que : (E') $x^2-5x+5=0$

Le discriminant de : (E') $x^2-5x+5=0$ est : $\Delta=5$ et ses racines sont : $x_1=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ et $x_1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

Donc : $S=\left\{\frac{5-\sqrt{5}}{2};\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right\}$

2) $(E)\ \frac{x^2-x}{x-1}=2x+3$

● a. On va déterminer le domaine de définition de l'équation :
Cette équation est définie si et seulement si $x-1\neq 0$ qui signifie que : $x\neq 1$

Donc : le domaine de définition de l'équation est : $D_E=\mathbb{R}-\{1\}$

● b. On résoud l'équation :

$\frac{x^2-x}{x-1}=2x+3$ Signifie que : $x^2-x=(x-1)(2x+3)$

Signifie que : $(F')\ x^2+2x-3=0$

Le discriminant de : $(F')\ x^2+2x-3$ est : $\Delta=16$ et ses racines sont :

$x_1=\frac{-2-4}{2}=-3\in D_E$ et $x_2=\frac{-2+4}{2}=1\notin D_E$; donc l''équation (E1) a une unique solution

Donc : $S=\{-3\}$

3) (G) : $\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$

● a). On va déterminer le domaine de définition de l'équation :
Cette équation est définie si et seulement si $x\neq 0$

Donc : le domaine de définition de l'équation est : $D_G=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

● b) On résoud l'équation :

$\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$ Signifie que : $x^2=x$ Signifie que : $x^2-x=0$ Signifie que : $x(x-1)=0$

Signifie que : $x=0$ ou $x-1=0$

Signifie que : $x=0\notin D_G=\mathbb{R}^*$ ou $x=1$

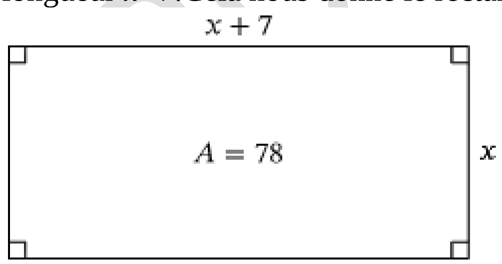
Donc : l''équation (G) a une unique solution

Donc : $S=\{1\}$

Exercice11 : (**) Quel est le périmètre d'un rectangle d'une longueur de 7 cm de plus que sa largeur et dont l'aire est de 78 cm² ?

Solution :

Pour commencer, il peut être utile de réaliser un schéma représentant le scénario décrit. On sait que la longueur est de 7 cm plus longue que la largeur, on appelle donc x la largeur, en centimètres et la longueur $x+7$.Cela nous donne le rectangle suivant.



On sait que l'aire d'un rectangle est calculée en multipliant sa longueur par sa largeur. Ici, la longueur est $x+7$ et la largeur est x.

Comme l'aire vaut 78, nous pouvons utiliser cette information pour écrire l'équation suivante :

$x(x+7)=78$

Si on utilise ensuite la propriété de distributivité pour développer les parenthèses, on obtient

$x^2+7x-78=0$

À ce stade, nous avons une équation du second degré sous une forme qui peut être résolue. Nous pouvons vérifier si l'équation peut être factorisée ou nous pouvons la résoudre par la méthode de complétion du carré ou encore en utilisant le discriminent :

Calculons le discriminant de : $x^2+7x-78=0$: $a=1$; $b=7$; $c=-78$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=7^2-4\times1\times(-78)=49+312=361=19^2>0$

Comme $\Delta>0$, trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\dfrac{-7-\sqrt{361}}{2a}=\dfrac{-7-19}{2\times1}=-13<0$ et $x_2=\dfrac{-7+\sqrt{361}}{2a}=\dfrac{-7+19}{2\times1}=6>0$

Sachant que x est une longueur, elle ne peut pas être négative, alors notre solution doit être : $x=6>0$

Enfin, nous devons déterminer le périmètre du rectangle, c'est-à-dire la somme des longueurs des côtés. Nous savons que la largeur est de 6 cm et que la longueur est de 6+7=13cm,le périmètre est donc donné par : $P=2(6+13)=38cm$

Exercice12 : (**)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $x-3\sqrt{x}-4=0$

Corrigé : Méthode : Je pose donc $X=\sqrt{x}$ et je me ramène à une équation du second degré dont l'inconnue est X.

Je ne dois pas oublier à la fin de donner les solutions de l´équation de départ.

● On va déterminer le domaine de définition de l'inéquation :

Cette inéquation est définie si et seulement si $x\geq0$

Donc : le domaine de définition de l'inéquation est : $D_I=[0;+\infty[$

● Résolution de l'inéquation : $x-3\sqrt{x}-4=0$ Équivaut à : $\left(\sqrt{x}\right)^2-3\sqrt{x}-4=0$

Je pose : $X=\sqrt{x}$ l'équation devienne : $X^2-3X-4=0$

Le discriminant de : $X^2-3X-4=0$ est : $\Delta=(-3)^2-4\times1\times(-4)=9+16=25>0$ et ses solutions sont :

$X_1=\dfrac{3-\sqrt{25}}{2\times1}=\dfrac{-2}{2}=-1$ et $X_2=\dfrac{3+\sqrt{25}}{2\times1}=\dfrac{8}{2}=4$

C'est-à-dire : $\sqrt{x}=-1$ impossible ou $\sqrt{x}=4$

C'est-à-dire : $x=16\in D_I$

Donc l´équation $x-3\sqrt{x}-4=0$ admet pour ensemble de solutions : $S=\{16\}$

Exercice13 : (***) et (****) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre m les équations suivantes :

1) $x^2-2x+m-1=0$ 2) $(m-1)x^2-2x-1=0$

Corrigé :1) $x^2-2x+m-1=0$

C'est une équation du second degré : $\Delta_m=b^2-4ac=4-4(m-1)=4-4m+4=8-4m$

L'équation admet deux solutions si et seulement si : $\Delta_m\succ0$

1ére cas : $8-4m\succ0$ c'est-à-dire : $m\prec2$

Alors l'équation admet deux solutions : $(\Delta_m\succ0)$: $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta_m}}{2a}=\dfrac{2-\sqrt{8-4m}}{2}=\dfrac{2-2\sqrt{2-m}}{2}=1-\sqrt{2-m}$

Et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta_m}}{2a}=\dfrac{2+\sqrt{8-4m}}{2}=\dfrac{2+2\sqrt{2-m}}{2}=1+\sqrt{2-m}$

Par suite : $S=\left\{1-\sqrt{2-m};1+\sqrt{2-m}\right\}$

2ére cas : $\Delta_m = 8-4m = 0$ c'est-à-dire : $m=2$

L'équation devient : $x^2-2x+1=0$ c'est à dire : $(x-1)^2=0$

Signifie que : $x=1$ par suite : $S=\{1\}$

3ére cas : $\Delta_m = 8-8m \prec 0$ c'est-à-dire : $m \succ 2$

L'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc : $S=\varnothing$

2) $(m-1)x^2-2x-1=0$

1ére cas : $m=1$ L'équation devient : $-2x-1=0$ c'est à dire : $x=-\frac{1}{2}$ et par suite : $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

2ére cas : $m\neq 1$ c'est une équation du second degré : $\Delta' = b'^2-ac=(-1)^2-(-1)\times(m-1)=1+m-1=m$

Si : $m=0$ alors : $\Delta'=0$

Donc : L'équation admet une solution unique : $x=\frac{-b'}{a}=\frac{1}{m-1}=\frac{1}{0-1}=-1$ par suite : $S=\{-1\}$

Si : $m \succ 0$ $(m\neq 1)$ alors : $\Delta' \succ 0$ L'équation admet donc deux solutions :

$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{1-\sqrt{m}}{m-1}$ Et $x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{1+\sqrt{m}}{m-1}$

Par suite : $S=\left\{\frac{1-\sqrt{m}}{m-1};\frac{1+\sqrt{m}}{m-1}\right\}$

Si : $m \succ 0$ alors : $\Delta' \prec 0$ l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Donc : $S=\varnothing$

Exercice14 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $3x^2+x-1<x^2-4x+2$ 2) $\frac{2x^2-12x+19}{x-2}\leq 0$ 3) $\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}>0$

4) $-2x(x-2)(x^2-8x+16)>0$

Solution :

Comment : Résoudre une inéquation du second degré algébriquement

• Réarrangez l'inéquation de sorte à rassembler tous les termes d'un même côté, en une expression définie comme $f(x)$,et à n'avoir plus que zéro de l'autre côté. Par exemple, $f(x)\leqslant 0$ ou $f(x)>0$.

• Résolvez $f(x)=0$ en factorisant, ou par la méthode de votre choix pour trouver les solutions de l'équation.

• Sélectionnez une valeur de test dans chaque intervalle : une valeur inférieure aux solutions de l'équation, une valeur comprise entre les solutions et une valeur supérieure aux solutions. Nous pouvons également utiliser un tableau de signes pour identifier les intervalles qui seront positifs ou négatifs.

• Identifiez les intervalles dont les valeurs vérifient l'inégalité.

1) $3x^2+x-1<x^2-4x+2$

On va regrouper tous les termes dans le même membre de l'inéquation pour obtenir une inéquation du type : $ax^2+bx+c<0$

$3x^2+x-1<x^2-4x+2$ Signifie que : $3x^2+x-1-x^2+4x-2<0$

Signifie que : $\boxed{2x^2+5x-3<0}$

Et on va déterminer le signe du trinôme : $2x^2+5x-3$

Calculons le discriminant de $2x^2+5x-3$: $a=2$; $b=5$; $c=-3$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=5^2-4\times 2(-3)=25+24=49>0$

Comme $\Delta>0$, trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-\sqrt{49}}{2\times 2}=\frac{-12}{4}=-3$ et $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{49}}{2\times 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

On obtient le tableau de signe suivant : $a=2>0$

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x^2+5x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S=\left]-3;\frac{1}{2}\right[$

2) $\dfrac{2x^2-12x+19}{x-2}\leq 0$

Pour déterminer le signe du trinôme : $2x^2-12x+19$

Calculons son discriminant : $a=2$; $b=-12$; $c=19$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=12^2-4\times 2\times 19=144-152=-8<0$

Comme : Le coefficient principal est : $a=2>0$ et $\Delta<0$, alors : $2x^2-12x+19>0$

Le signe de : $\dfrac{2x^2-12x+19}{x-2}$ ne dépend donc que de celui de : $x-2$

$x-2=0$ Signifie que : $x=2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S=\left]-\infty;2\right[$

3) $\dfrac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}>0$

a) Cette inéquation est définie si : $-x^2+8x-17\neq 0$

Calculons son discriminant : $a=-1$; $b=8$; $c=-17$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=8^2-4\times(-1)\times(-17)=64-68=-4<0$

Ce polynôme ne possède donc pas de racines réelles.

Donc : $D_I=\mathbb{R}$

b) Pour déterminer le signe du trinôme : $-6x^2-9x-3$

Calculons son discriminant : $a=-6$; $b=-9$; $c=-3$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-9)^2-4\times(-6)\times(-3)=81-72=9>0$

Comme $\Delta>0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\dfrac{9-\sqrt{9}}{2a}=\dfrac{9-3}{2\times(-6)}=\dfrac{6}{-12}=-\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{9+\sqrt{9}}{2a}=\dfrac{9+3}{2\times(-6)}=\dfrac{12}{-12}=-1$

Pour déterminer le signe du trinôme : $-x^2+8x-17$

Calculons son discriminant : $a=-1$; $b=8$; $c=-17$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=8^2-4\times(-1)\times(-17)=64-68=-4<0$

Comme : Le coefficient principal est : $a=-1<0$ et $\Delta<0$, alors : $-x^2+8x-17<0$

Ce polynôme ne possède donc pas de racines réelles.

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$D(x)$		$-$		$-$		$-$	
$\dfrac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

4) $-2x(x-2)(x^2-8x+16)>0$

$-2x(x-2)(x^2-8x+16)=0$ Signifie que : $x^2-8x+16=0$ ou $x-2=0$ ou $x=0$

Signifie que : $x^2-8x+16=0$ ou $x=2$ ou $x=0$

Pour déterminer le signe du trinôme : $x^2-8x+16$

Calculons son discriminant : $a=1$; $b=-8$; $c=16$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-8)^2-4\times1\times16=64-64=0$

Comme : Le coefficient principal est : $a=1>0$ et $\Delta=0$, alors : $x^2-8x+16\geq0$

La racine double est : $x_1=\dfrac{8}{2\times1}=4$

$-2x(x-2)(x^2-8x+16)=0$ Signifie que : $x=4$ ou $x=2$ ou $x=0$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2-8x+16$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$-2x(x-2)(x^2-8x+16)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Donc : l'ensemble de solutions de : $-2x(x-2)(x^2-8x+16)>0$ est : $S=\left]0;2\right]$

Exercice15 : (**) On considère l´équation : (E) : $x^3-x^2-4x-6=0$

1) Montrer que le nombre 3 est solution de (E)

2) Déterminer trois réels : a, b et c tels que : $x^3-x^2-4x-6=(x-3)(ax^2+bx+c)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : (I) : $x^3-x^2-4x-6>0$

Corrigé :1) On remarque que : $3^3-3^2-4\times3-6=27-9-12-6=27-27=0$

Donc : le nombre 3 est solution de (E)

2) Le nombre 3 est solution de (E) donc il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 telle que :

$x^3-x^2-4x-6=(x-3)(ax^2+bx+c)$

Or, $(x-3)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-3a)x^2+(c-3b)x-3c$.
Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification,

On trouve : $\begin{cases} a=1 \\ b-3a=-1 \\ c-3b=-4 \\ -3c=-6 \end{cases}$ Equivaut à : $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=2 \end{cases}$

Donc : $x^3-x^2-4x-6=(x-3)(x^2+2x+2)$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

$x^3-x^2-4x-6=0$ Equivaut à : $(x-3)(x^2+2x+2)=0$

Equivaut à : $x-3=0$ ou $x^2+2x+2=0$

Equivaut à : $x=3$ ou $x^2+2x+2=0$

Le discriminant de : $x^2+2x+2=0$ est : $\Delta=2^2-4\times 2=4-8=-4<0$ donc pas solutions

Ainsi, l'ensemble solution de (E) est : $S=\{3\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : (I) : $x^3-x^2-4x-6>0$

On a : $x^3-x^2-4x-6=(x-3)(x^2+2x+2)$

Le discriminant de : $x^2+2x+2=0$ est : $\Delta=-4<0$ et puisque : $a=1>0$ donc : $x^2+2x+2>0$
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ 3 $+\infty$
$x-3$	$-$ 0 $+$

Ainsi, l'ensemble solution de (I) est : $S=]3,+\infty[$

Exercice16 : (***) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $x^4+3x^2+2=0$

2) Déterminer une factorisation de x^4+3x^2+2 en un produit de trinômes.

3)En déduire une résolution de l'inéquation : $x^4+3x^2+2\leq 0$

Corrigé :1) Méthode : C'est une équation bicarrée, c'est à dire que l'inconnue est à la puissance 4, 2 et 0.
Je pose donc $X=x^2$ et je me ramène à une équation du second degré dont l'inconnue est X.
Je ne dois pas oublier à la fin de donner les solutions de l´équation de départ.

$x^4+3x^2+2=0$ Équivaut à : $(x^2)^2+3x^2+2=0$

Je pose : $X=x^2$ l'équation devienne : $X^2+3X+2=0$

Le discriminant de : $X^2+3X+2=0$ est : $\Delta=3^2-4\times1\times2=9-8=1>0$ et ses solutions sont :

$X_1=\frac{-3-\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{-4}{2}=-2$ et $X_2=\frac{-3+\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$

C'est-à-dire : $x^2=-2$ impossible ou $x^2=-1$ aussi impossible

Donc l´équation $x^4+3x^2+2=0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$:
$S=\varnothing$

2) On a : $X^2+3X+2=1(X+1)(X+2)$

Donc une factorisation de x^4+3x^2+2 en un produit de trinômes est : $x^4+3x^2+2=1(x^2+1)(x^2+2)$

3) Résolution de l'inéquation : $x^4+3x^2+2<0$

On a : $x^4+3x^2+2=1(x^2+1)(x^2+2)$

Et on a : $x^2+1>0$ et $x^2+2>0$ donc $x^4+3x^2+2>0$

Ainsi, l'ensemble solution de $x^4+3x^2+2\leq 0$ est : $S=\varnothing$

Exercice17 : (**) On considère l´équation : (E) : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4=0$

1) Montrer que les nombre -2 et 2 sont des solutions de (E)

2) Montrer que : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4=(x^2-4)(x^2+2x-1)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : (I) : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4>0$

Corrigé :1) On a : $2^4+2\times2^3-5\times2^2-8\times2+4=16+16-20-16+4=0$

Donc : le nombre 2 est solution de (E)

Donc : $x-2$ divise $x^4+2x^3-5x^2-8x+4$

On a aussi : $(-2)^4+2\times(-2)^3-5\times(-2)^2-8\times(-2)+4=16-16-20+16+4=0$

Donc : le nombre -2 est solution de (E)

2) 2 est solution de (E) donc : $x-2$ divise $x^4+2x^3-5x^2-8x+4$

-2 est solution de (E) donc : $x+2$ divise $x^4+2x^3-5x^2-8x+4$

Par suite : $(x+2)(x-2)=x^2-4$ divise $x^4+2x^3-5x^2-8x+4$

Par la division euclidienne de : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4$ par : x^2-4

On trouve que : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4=(x^2-4)(x^2+2x-1)$

Remarque : On peut simplement développer $(x^2-4)(x^2+2x-1)$ et essayer de trouver :

$x^4+2x^3-5x^2-8x+4$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E)

$x^4+2x^3-5x^2-8x+4=0$ Equivaut à : $(x^2-4)(x^2+2x-1)=0$ Equivaut à : $x^2-4=0$ ou $x^2+2x-1=0$

Equivaut à : $x^2=4$ ou $x^2+2x-1=0$ Equivaut à : $x=\sqrt{4}$ ou $x=-\sqrt{4}$ ou $x^2+2x-1=0$

Equivaut à : $x=2$ ou $x=-2$ ou $x^2+2x-1=0$

Le discriminant de : $x^2+2x-1=0$ est : $\Delta=2^2-4\times1\times(-1)=4+4=8=(2\sqrt{2})^2>0$ et ses solutions sont :

$x_1=\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2\times1}=-1-\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2\times1}=-1+\sqrt{2}$

Ainsi, l'ensemble solution de (E) est : $S=\{-1-\sqrt{2};-2;-1+\sqrt{2};2\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : (I) : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4>0$

On a : $x^4+2x^3-5x^2-8x+4=(x^2-4)(x^2+2x-1)$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-2		$-1+\sqrt{2}$		2		$+\infty$
x^2+2x-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2+2x-1)(x^2-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble solution de (I) est : $S=]-\infty,-1-\sqrt{2}[\cup]-2,-1+\sqrt{2}[\cup]2,+\infty[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien