Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°5 : Les polynômes

Exercice1 : (**) Soit : $P(x)=2x^3-x^2-13x-6$

1) Montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x+2$

2) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x+2$ montrer que : $P(x)=(x+2)Q(x)$ avec $Q(x)=2x^2-5x-3$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x)\geq 0$

5) En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$ en un produit de polynômes de 1ere degrés

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\succ 0$

Solution :1) $P(x)=2x^3-x^2-13x-6$

On a $P(-2)=2\times(-2)^3-(-2)^2-13\times(-2)-6=-16-4+26-6=0$ donc -2 est racine du polynôme $P(x)$

Donc $P(x)$ est divisible par $x+2$

2)

$$\begin{array}{r|l}
\ 2x^3-x^2-13x-6 & x+2 \\
+\ -2x^3-4x^2 & \hline \\
\hline
-5x^2-13x-6 & 2x^2-5x-3 \\
5x^2+10x & \\
\hline
-3x-6 & \\
3x+6 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Donc : $P(x)=(x+2)Q(x)$ avec : $Q(x)=2x^2-5x-3$

3) $Q(x)=2x^2-5x-3$ et $Q(x)=0$

Δ = (-5) ^{2} – 4 x 2x (-3) =25+ 24 = 49

Donc : $x_1=\frac{5-\sqrt{49}}{2\times 2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{49}}{2\times 2}=3$ par suite : $S=\left\{-\frac{1}{2},3\right\}$.

4) $Q(x)<0$ les racines de $Q(x)$ sont : $x_1=-\frac{1}{2}$ et $x_2=3$

Donc le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\frac{1}{2};3\right[$

5) Cherchons une factorisation du polynôme $P(x)$ en produits de polynômes de 1ere degrés:

On a : $P(x)=(x+2)Q(x)$ avec $Q(x)=2x^2-5x-3$

Et les racines du polynôme $Q(x)$ sont : $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 3$

Donc : une factorisation de $Q(x)$ est : $Q(x) = 2(x - x_1)(x - x_2)$

Donc : $Q(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3) = (2x+1)(x-3)$

Par suite une factorisation de $P(x)$ est : $P(x) = (x+2)(2x+1)(x-3)$

6) On a : $P(x) = (x+2)(2x+1)(x-3)$

$P(x) = 0$ Signifie ; $(x+2)(2x+1)(x-3) = 0$ c'est-à-dire : Signifie : $x+2=0$ ou $2x+1=0$ ou $x-3=0$

Signifie : $x=-2$ ou $x = -\frac{1}{2}$ ou $x=3$ Par suite : $S = \mathbb{R} - \left\{-2, -\frac{1}{2}, 3\right\}$

7) $P(x) < 0$ Signifie: $(x+2)Q(x) < 0$

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		3		$+\infty$
$Q(x)$		$+$			$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	0	$+$			$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc le tableau de signe suivant :

Donc : $S = \left]-\infty; -2\right[\cup \left]\frac{-1}{2}; 3\right[$

Exercice2 : (***) Soit : $P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 11x - 6$

1) Montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x+2$

2) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x+2$

Montrer que : $P(x) = (x+2)Q(x)$ avec : $Q(x) = -2x^2 + 7x - 3$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x) = 0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x) \geq 0$

5) En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$ en un produit de polynômes de 1ere degrés

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \succ 0$

Solution :1) $P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 11x - 6$

On a : $P(-2) = -2\times(-2)^3 + 3(-2)^2 + 11\times(-2) - 6 = +16 + 12 - 22 - 6 = 0$ donc --2 est racine du polynôme $P(x)$

Donc $P(x)$ est divisible par $x+2$

2) En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x+2$ On a donc : $P(x) = (x+2)Q(x)$ avec :

$Q(x) = -2x^2 + 7x - 3$

$$
\begin{array}{r|l}
-2x^3 + 3x^2 + 11x - 6 & x+2 \\
\hline
\boxed{2x^3 + 4x^2} \qquad\qquad & -2x^2 + 7x - 3 \\
7x^2 + 11x - 6 & \\
-7x^2 - 14x \qquad & \\
-3x - 6 & \\
3x + 6 & \\
\mathbf{0} &
\end{array}
$$

3) $Q(x) = -2x^2 + 7x - 3$ et $Q(x) = 0$

$\Delta = 7^2 - 4 \times (-2) \times (-3) = 49 - 24 = 25$

Donc : $x_1 = \frac{-7-\sqrt{25}}{2\times(-2)} = \frac{-12}{-4} = 3$ et $x_2 = \frac{-7+\sqrt{25}}{2\times(-2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$ Par suite: $S = \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$

4) $Q(x)<0$ les racines de $Q(x)$ sont : $x_2=\frac{1}{2}$ et $x_1=3$. Donc le tableau de signe est:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

5) Cherchons une factorisation du polynôme $P(x)$ on produits de polynômes de 1ere degrés:

On a : $P(x)=(x+2)Q(x)$ avec $Q(x)=-2x^2+7x-3$

Et les racines du polynôme $Q(x)$ sont : $x_2=\frac{1}{2}$ et $x_1=3$

Donc : une factorisation de $Q(x)$ est : $Q(x)=-2(x-x_1)(x-x_2)$

Donc : $Q(x)=-2(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x-3)(-2x+1)$

Par suite une factorisation de $P(x)$ est : $P(x)=(x+2)(x-3)(-2x+1)$

6) On a : $P(x)=(x+2)(x-3)(-2x+1)$

$P(x)=0$ Signifie ; $(x+2)(x-3)(-2x+1)=0$

Signifie : $x-3=0$ ou $-2x+1=0$ ou $x+2=0$

Signifie : $x=3$ ou $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-2$ par suite : $S=\left\{-2,1/2,3\right\}$

7) $P(x)<0$ Signifie: $(x+2)Q(x)<0$

x	$-\infty$		-2		$1/2$		3		$+\infty$
$Q(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $S=\left]-2;\frac{1}{2}\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

Exercice3 : (***) On considère les polynômes : $P(x)=-132x^3+347x^2-172x+12$ et $Q(x)=-132x^2+83x-6$

1) a) Démontrer, sans effectuer la division euclidienne, que $P(x)$ est divisible par $x-2$

b) Démontrer en utilisant la division euclidienne que : $P(x)=(x-2)Q(x)$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

b) En déduire une factorisation de $Q(x)$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

3)a) Calculer : $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

c) En déduire les solutions de l'équation : $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}{-132x^2+83x-6}\geq 0$

Solution :1) $P(x)=-132x^3+347x^2-172x+12$ et $Q(x)=-132x^2+83x-6$

1) a) On a : $P(2)=-132\times2^3+347\times2^2-172\times2+12=-1056+1388-344+12=1400-1400=0$

Donc : 2 est racine du polynôme $P(x)$

Donc : $P(x)$ est divisible par $x-2$

b) Démontrons en utilisant la division euclidienne que : $P(x)=(x-2)Q(x)$

En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x+2$ on trouve :

$$
\begin{array}{llll|l}
-132x^3 & +347x^2 & -172x & +12 & x-2 \\
\cline{5-5}
-(-132x^3 & +264x^2) & & & -132x^2+83x-6 \\
\cline{1-2}
+0x^3 & +83x^2 & -172x & & \\
 & -(+83x^2 & -166x) & & \\
\cline{2-3}
 & +0x^2 & -6x & +12 & \\
 & & -(-6x & +12) & \\
\cline{3-4}
 & & & +0 & \\
\end{array}
$$

On a donc : $P(x)=(x+2)Q(x)$ avec $Q(x)=-132x^2+83x-6$

2) a) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $Q(x)=0$:

$-132x^2+83x-6=0$

Le discriminant de : $-132x^2+83x-6=0$ est : $\Delta=(83)^2-4\times(-132)\times(-6)=3721=61^2>0$ et ses solutions sont :

$$x_1=\frac{-83+61}{2\times(-132)}=\frac{-22}{-264}=\frac{1}{12} \text{ et } x_2=\frac{-83-61}{2\times(-132)}=\frac{-144}{-264}=\frac{6}{11}$$

Par conséquent : $S=\left\{\frac{1}{12};\frac{6}{11}\right\}$

b) Déduction d'une factorisation de $Q(x)$:

$Q(x)=-132x^2+83x-6$ Admet deux racines : $x_1=\frac{1}{12}$ et $x_2=\frac{6}{11}$

Donc : $Q(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=-132\left(x-\frac{1}{12}\right)\left(x-\frac{6}{11}\right)=-12\times11\left(x-\frac{1}{12}\right)\left(x-\frac{6}{11}\right)=-(12x-1)(11x-6)$

c) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $P(x)=0$

$P(x)=0$ Signifie que : $(x-2)Q(x)=0$ Signifie que : $x-2=0$ ou $Q(x)=0$

Signifie que : $x_0=2$ ou $x_1=\frac{1}{12}$ et $x_2=\frac{6}{11}$

Par conséquent : $S=\left\{\frac{1}{12};\frac{6}{11};2\right\}$

3)a) Calculons : $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

$\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2=12+4\sqrt{6}+2=14+4\sqrt{6}$

b) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

Le discriminant de : $x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$ est :

$\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2-4\times\left(-2\sqrt{6}\right)\times1=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2+8\sqrt{6}$

$\Delta=12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

Puisque : $\Delta\succ0$ donc il y'a deux solutions : $x_1=\dfrac{-\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\sqrt{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}}{2\times1}=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$

ET $x_2=\dfrac{-\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}}{2\times1}=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$

Or on a : $2\sqrt{3}+\sqrt{2}\succ0$ par suite : $\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$

Donc: $x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times1}=\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times1}=-2\sqrt{3}$

Par suite: $S=\left\{-2\sqrt{3},\sqrt{2}\right\}$

c) $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

Est équivalente à : $\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ et on a donc : $X^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)X-2\sqrt{6}=0$

Mais d'après 3) b) on a : $X_1=-2\sqrt{3}$ et $X_2=\sqrt{2}$

Qui Signifie que: $\sqrt{x_1}=-2\sqrt{3}$ et $\sqrt{x_2}=\sqrt{2}$

Or $\sqrt{x_1}=-2\sqrt{3}$ n'a pas de solution

Donc: $\left(\sqrt{x_2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ qui Signifie que: $x_2=2$

Par suite: $S=\left\{2\right\}$

4) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\dfrac{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}{-132x^2+83x-6}\geq0$

$Q(x)=-132x^2+83x-6$ admet deux racines : $x_1=\dfrac{1}{12}$ et $x_2=\dfrac{6}{11}$

$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$ Admet deux racines : $x_1=\sqrt{2}$ et $x_2=-2\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{6}{11}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}$		+	0	−		−		−	0	+	
$-132x^2+83x-6$		−		−	0	+	0	−		−	
$\dfrac{x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}}{-132x^2+83x-6}$		−	0	+	‖	−	‖	+	0	−	

Par suite : $S=\left[-2\sqrt{3},\dfrac{1}{12}\right[\cup\left]\dfrac{6}{11},\sqrt{2}\right]$

Exercice4: (***) Soit le polynôme suivant (E) : $P(x)=x^3+\sqrt{3}x^2-x-\sqrt{3}$

1) Montrer que -1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}\right)$

3) On pose : $Q(x)=x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}$ et soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $Q(x)=0$

4) En déduire les solutions de l'équation : $x-\left(1-\sqrt{3}\right)\sqrt{x}-\sqrt{3}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\leq 0$

Solution : 1) $P(x)=x^3+\sqrt{3}x^2-x-\sqrt{3}$

On a : $P(-1)=(-1)^3+\sqrt{3}(-1)^2-(-1)-\sqrt{3}$

$P(-1)=-1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=0$ Donc : -1 est racine du polynôme $P(x)$

2) $(x+1)\left(x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}\right)=x^3-\left(1-\sqrt{3}\right)x^2-\sqrt{3}x+x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}$

$$=x^3-x^2+\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}x+x^2-x+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=x^3+\sqrt{3}x^2-x-\sqrt{3}=P(x)$$

3) a) $Q(x)=x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}$ $\quad a=1$ et $b=-\left(1-\sqrt{3}\right)$ et $c=-\sqrt{3}$

$\Delta=b^2-4ac=\left(-\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2-4\times\left(-\sqrt{3}\right)\times1=\left(1-\sqrt{3}\right)^2+4\sqrt{3}$

$\Delta=1^2-2\times1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2+4\sqrt{3}=1^2+2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

b) $Q(x)=x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}$ Puisque : $\Delta\succ 0$

Donc : il y'a deux racines : $x_1=\dfrac{1-\sqrt{3}+\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{2\times1}=\dfrac{1-\sqrt{3}+\left|1+\sqrt{3}\right|}{2\times1}$ et

$x_2=\dfrac{1-\sqrt{3}-\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{2\times1}=\dfrac{1-\sqrt{3}-\left|1+\sqrt{3}\right|}{2\times1}$

Or: $1+\sqrt{3}\succ 0$ Donc: $\left|1+\sqrt{3}\right|=1+\sqrt{3}$

Donc: $x_1=\dfrac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{2\times1}=1$ et $x_2=\dfrac{1-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{2\times1}=-\sqrt{3}$ par suite : $S=\left\{-\sqrt{3},1\right\}$

4) $x-\left(1-\sqrt{3}\right)\sqrt{x}-\sqrt{3}=0$ Est équivalente à: $\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(1-\sqrt{3}\right)\sqrt{x}-\sqrt{3}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ et on a donc : $X^2-\left(1-\sqrt{3}\right)X-\sqrt{3}=0$

Mais d'après 3)b) on a : $X_1=-\sqrt{3}$ et $X_2=1$ qui Signifie que: $\sqrt{x_1}=-\sqrt{3}$ et $\sqrt{x_2}=1$

Or $\sqrt{x_1}=-\sqrt{3}$ n'a pas de solution donc: $\left(\sqrt{x_2}\right)^2=1^2$

Qui Signifie que: $x_2=1$ par suite: $S=\{1\}$

5) $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}\right)$

$P(x)=0$ Signifie: $x+1=0$ ou $x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$

Signifie: $x_0 = -1$ ou $x_1 = -\sqrt{3}$ ou $x_2 = 1$ donc: $S = \left\{-1, 1, -\sqrt{3}\right\}$

6) $P(x) \leq 0$ Signifie que: $(x+1)\left(x^2 - \left(1-\sqrt{3}\right)x - \sqrt{3}\right) \leq 0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S = \left]-\infty; -\sqrt{3}\right] \cup [-1;1]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien