Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°6 :

Equations et inéquations et systèmes partie3 : Equation du second degré

Exercice1 : (*) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $4x^2-8x+3=0$ 2) $x^2-4x+2=0$ 3) $x^2+5x+7=0$

Solution : 1) $4x^2-8x+3=0$ $\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times3\times(4)=84-8=16=(4)^2>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\dfrac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\times4}$ et $x_2=\dfrac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times4}$

$x_1=\dfrac{8+4}{8}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{8-4}{8}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$ donc : $S=\left\{\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right\}$

2) $x^2-4x+2=0$: $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times(1)=16-8=8>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\dfrac{-(-4)+\sqrt{8}}{2\times1}$ et $x_2=\dfrac{-(-4)-\sqrt{8}}{2\times1}$

$x_1=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2(2+\sqrt{2})}{2}=2+\sqrt{2}$ **et** $x_2=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2(2-\sqrt{2})}{2}=2-\sqrt{2}$ Donc **:** $S=\{2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\}$

3) $x^2+5x+7=0$: $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times1\times7=25-28=-3<0$

Comme $\Delta<0$, l'équation ne possède pas de solution réelle c'est-à-dire : $S=\varnothing$

Exercice2 : (**) Soit le trinôme (E) : $P(x)=2x^2-\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{15}$

1) Prouver que le trinôme (E) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$; $\alpha^2+\beta^2$

Solution : 1) $a=2$: et et $b=-\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$ et $c=\sqrt{15}$

$\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2-4\times2\times\sqrt{15}=\left(2\sqrt{5}\right)^2+4\sqrt{5}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-8\sqrt{15}=20+4\sqrt{15}+3-8\sqrt{15}$

$\Delta=23-4\sqrt{15}\succ0$ Car : $23\succ4\sqrt{15}$ $23^2=529$ et $\left(4\sqrt{15}\right)^2=16\times15=240$

Comme $\Delta>0$: le trinôme (E) a deux racines distinctes : α et β

2) On a : $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ et $\alpha\times\beta=\dfrac{c}{a}$ donc $\alpha+\beta=\dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha\times\beta=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\left(\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{2}}=\frac{\sqrt{23}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{5}$$

On a : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ donc : $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$

Donc $\alpha^2+\beta^2=\left(\dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)=\dfrac{23}{4}$

Exercice3 : (**) Ecrire sous la forme canonique les trinômes suivants :

1) $F(x)=x^2-7x+3$ 2) $A(x)=x^2-x+5$ 3) $B(x)=x^2+5x-\frac{1}{2}$

Corrigé : On cherche la forme canonique :

1) $F(x)=x^2-7x+3$

$$F(x)=x^2-7x+3=x^2-2\times x\times\frac{7}{2}+\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2+3$$

$$F(x)=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+3$$

$$\boxed{F(x)=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{37}{4}}$$

2) $A(x)=x^2-x+5$

$$A(x)=x^2-x+5=x^2-2\times x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+5$$

$$A(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+5$$

$$\boxed{A(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}}$$

3) $B(x)=x^2+5x-\frac{1}{2}$

$$B(x)=x^2+5x-\frac{1}{2}=x^2+2\times x\times\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{B(x)=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{27}{4}}$$

Exercice4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2x^2-3x-5=0$ 2) $x^2-5x+2=0$ 3) $x^2-2x+6=0$

4) $x^2-6x+9=0$ 5) $x(x-3)=2(x-1)$ 6) $(x-2)(x+3)=(x-2)(4x+1)$

Corrigé :1) $2x^2-3x-5=0$; On utilise bien sûr le discriminant.

Le discriminant de : $2x^2-3x-5=0$ est : $\Delta=(-3)^2-4\times2\times(-5)=49>0$

Donc : l´équation admet deux solutions réelles distincts :

$$x_1=\frac{3-\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{3-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1 \text{ et } x_2=\frac{3+\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

L'ensemble des solutions de l'équation ; $2x^2-3x-5=0$ est donc : $S=\left\{-1;\frac{5}{2}\right\}$

2) $x^2-5x+2=0$; On utilise bien sûr le discriminant.

Le discriminant de : $x^2-5x+2=0$ est : $\Delta=(-5)^2-4\times1\times2=25-8=17>0$

Donc : l´équation admet deux solutions réelles distincts : $x_1=\frac{5-\sqrt{17}}{2\times1}=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{17}}{2\times1}=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$

L'ensemble des solutions de l'équation ; $x^2-5x+2=0$ est donc : $S=\left\{\frac{5-\sqrt{17}}{2};\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right\}$

3) $x^2-2x+6=0$; On utilise bien sûr le discriminant.

Le discriminant de : $x^2-2x+6=0$ est : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times6=4-24=-20<0$

Donc : l´équation n'admet pas de solution réelle.

L'ensemble des solutions de l'équation ; $x^2-2x+6=0$ est donc : $S=\varnothing$

4) $x^2-6x+9=0$; On utilise bien sûr le discriminant.

Le discriminant de : $x^2-6x+9=0$ est : $\Delta=(-6)^2-4\times1\times9=36-36=0$

Donc : l´équation admet une unique solution réelle :

$x_1=\frac{-b}{2\times a}=\frac{6}{2}=3$ et $x_2=\frac{3+\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

L'ensemble des solutions de l'équation ; $x^2-6x+9=0$ est donc : $S=\{3\}$

5) $x(x-3)=2(x-1)$

Je développe, je passe tout dans le premier membre et l´équation s´écrit :

$x(x-3)=2(x-1)$ Signifie que : $x^2-3x=2x-2$ Signifie que : $x^2-5x+2=0$

Le discriminant de : $x^2-5x+2=0$ est : $\Delta=(-5)^2-4\times1\times2=25-8=17>0$

Donc : l´équation admet deux solutions réelles distincts :

$x_1=\frac{5-\sqrt{17}}{2\times1}=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{17}}{2\times1}=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$

L'ensemble des solutions de l'équation ; $x^2-5x+2=0$ est donc : $S=\left\{\frac{5-\sqrt{17}}{2};\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right\}$

6) $(x-2)(x+3)=(x-2)(4x+1)$

Je passe tout dans le premier membre et l´équation et je factorise par $(x-2)$ en effet :

$(x-2)(x+3)=(x-2)(4x+1)$ Signifie que : $(x-2)(x+3)-(x-2)(4x+1)=0$

Signifie que : $(x-2)\left[(x+3)-(4x+1)\right]=0$

Signifie que : $(x-2)(-3x+2)=0$

Signifie que : $-3x+2=0$ ou $x-2=0$

Signifie que : $x=\frac{2}{3}$ ou $x=2$

L'ensemble des solutions de l'équation est : $S=\left\{\frac{2}{3};2\right\}$

Exercice5 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\frac{1}{x}>\frac{x}{x+2}$ 2) $\frac{x}{x+1}\leq\frac{3}{(x+1)(x-2)}$ 3) $\frac{x}{(x-2)^2}\geq1+\frac{3}{x-2}$ 4) $\frac{2}{x+3}<-x$

Solution : Comment : Résoudre une inéquation du second degré algébriquement

- Réarrangez l'inéquation de sorte à rassembler tous les termes d'un même côté, en une expression définie comme $f(x)$ et à n'avoir plus que zéro de l'autre côté. Par exemple, $f(x)\leqslant0$ ou $f(x)>0$.
- Résolvez $f(x)=0$ en factorisant, ou par la méthode de votre choix pour trouver les solutions de l'équation.

• Sélectionnez une valeur de test dans chaque intervalle : une valeur inférieure aux solutions de l'équation, une valeur comprise entre les solutions et une valeur supérieure aux solutions. Nous pouvons également utiliser un tableau de signes pour identifier les intervalles qui seront positifs ou négatifs.

• Identifiez les intervalles dont les valeurs vérifient l'inégalité.

1) $\frac{1}{x} > \frac{x}{x+2}$

On va regrouper tous les termes dans le même membre de l'inéquation :

$\frac{1}{x} > \frac{x}{x+2}$ Signifie que : $\frac{1}{x} - \frac{x}{x+2} > 0$

Signifie que : $\frac{x+2-x^2}{x(x+2)} > 0$ Signifie que : $\frac{-x^2+x+2}{x(x+2)} > 0$

Et on va déterminer le signe du trinôme : $-x^2+x+2$

Calculons le discriminant de $-x^2+x+2$: $a=-1$; $b=1$; $c=2$

Donc : $\Delta = b^2 - 4\times a\times c = 1^2 - 4\times 2(-1) = 1+8 = 9 > 0$

Comme $\Delta > 0$, trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2a} = \frac{-4}{2\times(-1)} = 2$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2a} = \frac{2}{2\times(-1)} = -1$

$x(x+2)=0$ Signifie que : $x=0$ ou $x+2=0$ Signifie que : $x=0$ ou $x=-2$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		2		$+\infty$
$x+2-x^2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{x+2-x^2}{x(x+2)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S =]-2;-1[\cup]0;2[$

2) $\frac{x}{x+1} \le \frac{3}{(x+1)(x-2)}$

On va Réarrangez l'inéquation de sorte à rassembler tous les termes d'un même côté, en une expression définie comme $f(x)$ et à n'avoir plus que zéro de l'autre côté. Par exemple, $f(x) \leqslant 0$

$\frac{x}{x+1} \le \frac{3}{(x+1)(x-2)}$ Signifie que : $\frac{x}{x+1} - \frac{3}{(x+1)(x-2)} \le 0$

Signifie que : $\frac{x(x-2)-3}{(x+1)(x-2)} \le 0$ Signifie que : $\frac{x^2-2x-3}{(x+1)(x-2)} \le 0$

Et on va déterminer le signe du trinôme : x^2-2x-3

Calculons le discriminant de x^2-2x-3 : $a=1$; $b=-2$; $c=-3$

Donc : $\Delta = b^2 - 4\times a\times c = (-2)^2 - 4\times 1(-3) = 4+12 = 16 > 0$

Comme $\Delta > 0$, trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{-2}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{6}{2} = 3$

$(x+1)(x-2)=0$ Signifie que : $x+1=0$ ou $x-2=0$ Signifie que : $x=-1$ ou $x=2$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2-2x-3}{(x+1)(x-2)}$		$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S=]2;3]$

3) $\frac{x}{(x-2)^2}\geq 1+\frac{3}{x-2}$

On va Réarrangez l'inéquation de sorte à rassembler tous les termes d'un même côté, en une expression définie comme $A(x)$ et à n'avoir plus que zéro de l'autre côté. Par exemple, $A(x)\geq 0$

$\frac{x}{(x-2)^2}\geq 1+\frac{3}{x-2}$ Signifie que : $\frac{x}{(x-2)^2}-1-\frac{3}{x-2}\geq 0$

Signifie que : $\frac{x-(x-2)^2-3(x-2)}{(x-2)^2}\geq 0$ Signifie que : $\frac{x-x^2+4x-4-3x+6}{(x-2)^2}\geq 0$

Signifie que : $\frac{-x^2+2x+2}{(x-2)^2}\geq 0$

Et on va déterminer le signe du trinôme : $-x^2+2x+2$

Calculons le discriminant de $-x^2+2x+2$: $a=-1$; $b=2$; $c=2$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=2^2-4\times 2(-1)=4+8=12>0$

Comme $\Delta>0$, trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-\sqrt{12}}{2\times(-1)}=\frac{-2-2\sqrt{3}}{-2}=1+\sqrt{3}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+\sqrt{12}}{2\times(-1)}=\frac{-2+2\sqrt{3}}{-2}=1-\sqrt{3}$

$(x-2)^2=0$ Signifie que : $x-2=0$ Signifie que : $x=2$ ($(x-2)^2$ est positif)

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		2		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$-x^2+2x+2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$\frac{-x^2+2x+2}{(x-2)^2}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S=\left[1-\sqrt{3};2\right[\cup\left]2;1+\sqrt{3}\right]$

4) $\frac{2}{x+3}<-x$

On va Réarrangez l'inéquation de sorte à rassembler tous les termes d'un même côté, en une expression définie comme $A(x)$ et à n'avoir plus que zéro de l'autre côté. Par exemple, $A(x)<0$

$\frac{2}{x+3} < -x$ Signifie que : $\frac{2}{x+3} + x < 0$

Signifie que : $\frac{2+x(x+3)}{x+3} < 0$ Signifie que : $\frac{x^2+3x+2}{x+3} < 0$

Et on va déterminer le signe du trinôme : x^2+3x+2

Calculons le discriminant de x^2+3x+2 : $a=1$; $b=3$; $c=2$

Donc : $\Delta = b^2 - 4\times a\times c = 3^2 - 4\times 2\times 1 = 9-8 = 1 > 0$

Comme $\Delta > 0$, trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{-3-1}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{-3+1}{2} = -1$

$x+3=0$ Signifie que : $x=-3$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
x^2+3x+2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{x^2+3x+2}{x+3}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : l'ensemble de solutions est : $S =]-\infty;-3[\cup]-2;-1[$

Exercice6 : (**) Un triangle rectangle a des côtés de longueurs n cm, $3(n+1)$ cm et $(3n+4)$ cm.

Déterminer la longueur de son côté le plus petit

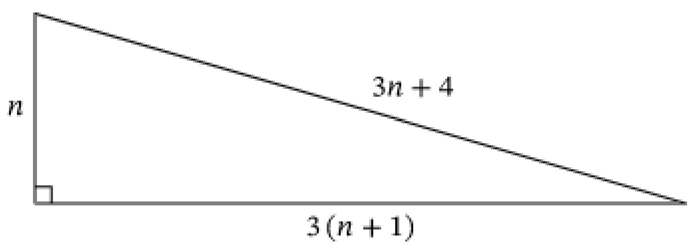
Astuce : Déterminons d'abord quel côté est l'hypoténuse

Solution :

Puisqu'il s'agit d'un problème impliquant des longueurs dans un triangle rectangle, c'est une bonne idée d'utiliser les informations qui nous ont été données pour réaliser un schéma. Pour ce faire, nous devons d'abord déterminer quelle est la longueur de l'hypoténuse.

On note que l'un des côtés a une longueur de n cm, n doit donc être positif. Nous notons également que $3(n+1) = 3n+3$ est plus petit que l'autre longueur, $3n+4$, donc cela doit être l'hypoténuse.

Cela nous donne ce qui suit.



Le côté le plus petit a une longueur n, nous devons donc déterminer la valeur de n.

Nous pouvons le faire en appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle On a;

Signifie que $(3n+4)^2 = n^2 + (3(n+1))^2$ Signifie que : $9n^2+24n+16 = n^2+9(n+1)^2$

Signifie que : $9n^2+24n+16 = n^2+9n^2+18n+9$

Signifie que : $n^2-6n-7=0$

Calculons le discriminant de : $n^2-6n-7=0$: $a=1;\ b=-6\ ;\ c=-7$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-6)^2-4\times1\times(-7)=36+28=64=8^2>0$

Comme $\Delta>0$, trinôme possède deux racines distinctes :

$$n_1=\frac{6-\sqrt{64}}{2a}=\frac{6-8}{2\times1}=-1<0 \quad \text{et} \quad n_2=\frac{6+\sqrt{64}}{2a}=\frac{6+8}{2\times1}=7>0$$

Enfin, le côté le plus petit du triangle a une longueur de n cm, et côté le plus petit a donc une longueur de 7 cm.

Exercice7 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$(I)\ :\ \frac{x^2-6x+9}{3x^2+10x-8}\leq 0$$

Solution : a) On cherche l'ensemble de définition de l'inéquation

$$D_I=\left\{x\in\mathbb{R}/3x^2+10x-8\neq 0\right\}$$

Calculons le discriminant de $3x^2+10x-8$: $a=3\ ;\ b=10\ ;\ c=-8$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=10^2-4\times3\times(-8)=192>0$

Comme $\Delta>0$, le trinôme : $3x^2+10x-8$ possède deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-10-\sqrt{196}}{2a}=\frac{-10-14}{2\times3}=\frac{-24}{6}=-4 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-10+\sqrt{196}}{2a}=\frac{-10+14}{2\times3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Donc $D_I=\mathbb{R}/\left\{-4;\frac{2}{3}\right\}$

b) Le signe de : $\frac{x^2-6x+9}{3x^2+10x-8}$ dépend du signe des expressions : $3x^2+10x-8$ et x^2-6x+9

On a : $x^2-6x+9=x^2-2\times x\times3+3^2=(x-3)^2\geq 0$

$x^2-6x+9=0$ Equivaut à : $(x-3)^2=0$ Equivaut à : $x-3=0$

Donc : on obtient le tableau de signe suivant

x	$-\infty$		-4		$\frac{2}{3}$		3		$+\infty$
$x2-6x+9$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$3x2+10x-8$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x2-6x+9}{3x2+10x-8}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est : $S=\left]-4;\frac{2}{3}\right[\cup\{3\}$

Exercice8 :(***) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante

$$\left|x^2+3x+2\right|+\left|x^2-3x+2\right|<12\ :\ (I)$$

Solution : $\left|x^2+3x+2\right|+\left|x^2-3x+2\right|<12\ ;\ (I)$

Étudions le signe des trinômes suivants : x^2+3x+2 et x^2-3x+2

Calculons le discriminant de x^2+3x+2 : $a=1\ ;\ b=3\ ;\ c=2$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=3^2-4\times1\times2=9-8=1>0$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme : x^2+3x+2 possède deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{-4}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{-2}{2} = -1$

Calculons le discriminant de x^2-3x+2 : $a=1$; $b=-3$; $c=2$

Donc : $\Delta = b^2-4\times a\times c = (-3)^2-4\times 1\times 2 = 9-8 = 1 > 0$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme : x^2-3x+2 possède deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{4}{2} = 2$

Donc : on obtient le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	-2		-1		1		2		$+\infty$
$x2-3x+2$	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$x2+3x+2$	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	

Si : $x\in\left]-\infty;-2\right]$ alors : $\left|x^2+3x+2\right| = x^2+3x+2$ et $\left|x^2-3x+2\right| = x^2-3x+2$

L'inéquation (I) devient : $x^2+3x+2+x^2-3x+2<12$

Signifie que : $2x^2+4<12$

Signifie que : $x^2<4$ Signifie que : $\sqrt{x^2}<\sqrt{4}$ Signifie que : Signifie que : $-2<x<2$ $|x|<2$

Donc : $S_1 = \left]-2;2\right[\cap\left]-\infty;-2\right] = \varnothing$

Si : $x\in[-2;-1]$ alors : $\left|x^2+3x+2\right| = -\left(x^2+3x+2\right)$ et $\left|x^2-3x+2\right| = x^2-3x+2$

L'inéquation (I) devient : $-x^2-3x-2+x^2-3x+2<12$

Signifie que : $-6x<12$ Signifie que : $x>-2$

Donc : $S_2 = \left]-2;+\infty\right]\cap[-2;-1] = \left]-2;-1\right[$

Si : $x\in[-1;1]$ alors : $\left|x^2+3x+2\right| = x^2+3x+2$ et $\left|x^2-3x+2\right| = x^2-3x+2$

L'inéquation (I) devient : $x^2+3x+2+x^2-3x+2<12$

Signifie que : $2x^2+4<12$ Signifie que : $x^2<4$

Signifie que : $\sqrt{x^2}<\sqrt{4}$ Signifie que : $|x|<2$ Signifie que : $-2<x<2$

Donc : $S_3 = [-1;1]\cap\left]-2;2\right] = [-1;1]$

Si : $x\in[1;2]$ alors : $\left|x^2+3x+2\right| = x^2+3x+2$ et $\left|x^2-3x+2\right| = -\left(x^2-3x+2\right)$

L'inéquation (I) devient : $x^2+3x+2-x^2+3x-2<12$

Signifie que : $6x<12$ Signifie que : $x<2$

Donc : $S_4 = [1;2]\cap\left]-\infty;2\right[= \left[1;2\right[$

Si : $x\in\left[2;+\infty\right[$ alors : $\left|x^2+3x+2\right| = x^2+3x+2$ et $\left|x^2-3x+2\right| = x^2-3x+2$

L'inéquation (I) devient : $x^2+3x+2+x^2-3x+2<12$

Signifie que : $2x^2+4<12$ Signifie que : $x^2<4$ Signifie que : $|x|<2$ Signifie que : $-2<x<2$

Donc : $S_5 = \left]-2;2\right[\cap\left[2;+\infty\right[= \varnothing$

Par conséquent : $S = S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5 = \left]-2;2\right[$

Exercice9 :(***) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\left|2x^2-x-6\right|-\left|x+1\right|-1=0\ :\ (E_1)$

2) $2x^4-x^2-6=0$

3) $x^2+|x|-2=0$

4) $x-3\sqrt{x}+2=0$

5) $\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{3}{25}=0$

Corrigé :1) $\left|2x^2-x-6\right|-\left|x+1\right|-1=0$

Soit : $x\in\mathbb{R}$

Et on va déterminer le signe du trinôme : $2x^2-x-6$

Calculons le discriminant de $2x^2-x-6$: $a=2$; $b=-1$; $c=-6$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-1)^2-4\times2(-6)=1+48=49>0$

Comme $\Delta>0$, trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{8}{4}=2$

$x+1=0$ Signifie que : $x=-1$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$ $\quad\frac{-3}{2}$	-1	2	$+\infty$
$2x2-x-6$	$+$ 0	$-$	$-$ 0	$+$
$x+1$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$

Si : $x\in\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ alors : $\left|2x^2-x-6\right|=2x^2-x-6$ et $|x+1|=-(x+1)$

L'équation (E_1) devient : $2x^2-x-6+x+1-1=0$

Signifie que : $2x^2-6=0$

Signifie que : $x^2=3$

Signifie que : $x=-\sqrt{3}\notin\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ ou $x=\sqrt{3}\notin\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

Donc : $S_1=\varnothing$

Si : $x\in\left[-\frac{3}{2};-1\right]$ alors : $\left|2x^2-x-6\right|=-\left(2x^2-x-6\right)$ et $|x+1|=-(x+1)$

L'équation (E_1) devient : $-2x^2+x+6+x+1-1=0$

Signifie que : $-2x^2+2x+6=0$

Signifie que : $2\left(-x^2+x+3\right)=0$

Signifie que : $-x^2+x+3=0$

Calculons le discriminant de $-x^2+x+3=0$: $a=-1$; $b=1$; $c=3$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=1^2-4\times3(-1)=1+12=13>0$

Comme $\Delta>0$, L'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{13}}{2\times 1} = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \in \left[-\frac{3}{2};-1\right]$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2\times 1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \notin \left[-\frac{3}{2};-1\right]$

Donc : $S_2 = \left\{\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$

Si : $x \in [-1;2]$ alors : $\left|2x^2-x-6\right| = -\left(2x^2-x-6\right)$ et $|x+1| = x+1$

L'équation (E_1) devient : $-2x^2+x+6-x-1-1=0$

Signifie que : $-2x^2+4=0$

Signifie que : $x^2=2$

Signifie que : $x=-\sqrt{2} \in [-1;2]$ ou $x=\sqrt{2} \in [-1;2]$

Donc : $S_3 = \left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$

Si : $x \in [2;+\infty[$ alors : $\left|2x^2-x-6\right| = 2x^2-x-6$ et $|x+1| = x+1$

L'équation (E_1) devient : $2x^2-x-6-x-1-1=0$

Signifie que : $2x^2-2x-8=0$

Signifie que : $2\left(x^2-x-4\right)=0$

Signifie que : $x^2-x-4=0$

Calculons le discriminant de $x^2-x-4=0$: $a=1$; $b=-1$; $c=-4$

Donc : $\Delta = b^2-4\times a\times c = (-1)^2-4\times 1(-4) = 1+16 = 17 > 0$

Comme $\Delta > 0$, L'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{17}}{2\times 1} = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \notin [2;+\infty[$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2\times 1} = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \in [2;+\infty[$

Donc : $S_4 = \left\{\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$

Par conséquent : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \left\{\frac{1+\sqrt{17}}{2};-\sqrt{2};\sqrt{2};\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$

2) $2x^4-x^2-6=0$

$2x^4-x^2-6=0$ Equivalent a: $2\left(x^2\right)^2-x^2-6=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=x^2$ nous obtenons donc : l'équation : $2X^2-X-6=0$

Calculons le discriminant de $2X^2-X-6=0$: $a=2$; $b=-1$; $c=-6$

Donc : $\Delta = b^2-4\times a\times c = (-1)^2-4\times 2(-6) = 1+48 = 49 > 0$

Comme $\Delta > 0$, L'équation $2X^2-X-6=0$ possède deux solutions distinctes :

$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{1-7}{4} = -\frac{3}{2}$ et $X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{1+7}{4} = 2$

Donc : $X=-\frac{3}{2}$ ou $X=2$ et par suite : $x^2=-\frac{3}{2}$ ou $x^2=2$

Mais l'équation : $x^2=-\frac{3}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

Donc : $x^2=2$

Signifie que : $x=-\sqrt{2}$ ou $x=\sqrt{2}$

Par suite : $S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$.

3) $x^2+|x|-2=0$

$x^2+|x|-2=0$ Equivalent à : $|x|^2+|x|-2=0$ car $|x|^2=x^2$

Faisons un changement de variable en posant : $X=|x|$ nous obtenons l'équation : $X^2+X-2=0$

Calculons le discriminant de $X^2+X-2=0$: $a=1$; $b=1$; $c=-2$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=1^2-4\times1(-2)=1+8=9>0$

Comme $\Delta>0$, L'équation $X^2+X-2=0$ possède deux solutions distinctes :

$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{-1-3}{2}=-2$ et $X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{-1+3}{2}=1$

Donc : $X=-2$ ou $X=1$ qui est équivalent a: $|x|=-2$ ou $|x|=1$

Mais l'équation : $|x|=-2$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$|x|=1$ Signifie : $x=1$ ou $x=-1$ par suite : $S=\{-1;1\}$

4) $x-3\sqrt{x}+2=0$

$x-3\sqrt{x}+2=0$ Equivalent a : $\left(\sqrt{x}\right)^2-3\sqrt{x}+2=0$ car $\sqrt{x}^2=x$

Faisons un changement de variable en posant : $X=\sqrt{x}$

Nous obtenons l'équation : $X^2-3X+2=0$

Calculons le discriminant de $X^2-3X+2=0$: $a=1$; $b=-3$; $c=2$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-3)^2-4\times1\times2=98=1>0$

Comme $\Delta>0$, L'équation $X^2-3X+2=0$ possède deux solutions distinctes :

$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$ et $X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{4}{2}=2$

Donc : d'après A) 1) on a : $X=1$ ou $X=2$

Equivalent à : $\sqrt{x}=1$ ou $\sqrt{x}=2$

$\sqrt{x}=1$ Signifie : $\left(\sqrt{x}\right)^2=1^2$ c'est-à-dire : $x=1$

$\sqrt{x}=2$ Signifie : $\left(\sqrt{x}\right)^2=2^2$ c'est-à-dire : $x=4$

Par suite : $S=\{1;4\}$.

5) $\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{3}{25}=0$ Signifie : $3\left(\frac{1}{x}\right)^2-2\frac{1}{x}+\frac{3}{25}=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X=\frac{1}{x}$

Nous obtenons l'équation : $3X^2-2X+\frac{3}{25}=0$

Calculons le discriminant : $a=3$; $b=-2$; $c=\frac{3}{25}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-2)^2-4\times3\times\frac{3}{5}=\frac{64}{25}>0$

Comme $\Delta>0$, L'équation $3X^2-2X+\frac{3}{25}=0$ possède deux solutions distinctes :

$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{\frac{64}{5}}}{2\times 3}=\frac{1}{15}$ et $X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{\frac{64}{5}}}{2\times 3}=\frac{3}{5}$

Donc : $X=\frac{1}{15}$ ou $X=\frac{3}{5}$

Equivalent à : $\frac{1}{x}=\frac{1}{15}$ ou $\frac{1}{x}=\frac{3}{5}$

Equivalent à : $x=\frac{15}{1}=15$ ou $x=\frac{5}{3}$

Par suite : $S=\left\{\frac{5}{3};15\right\}$.

Exercice10 : (***) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

(I) ; $\sqrt{x^2+1}-2x+1\leq 0$

Corrigé : a) L'équation est définie si $x^2+1\geq 0$ toujours vraie

L'équation est donc définie sur : $D_I=\mathbb{R}$

b) $\sqrt{x^2+1}-2x+1\leq 0$ Equivaut à : $\sqrt{x^2+1}\leq 2x-1$

Le tableau de signe de l'expression : $2x-1$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$2x-1$	$-$	0	$+$

Si : $x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ alors : $2x-1<0$ et l'inéquation n'a pas de solution puisque

$\sqrt{x^2+1}>0$

Donc : $\sqrt{x^2+1}\leq 2x-1$ est vraie pour tout $x\in[1;7[$

Donc : $S_1=\varnothing$

Si : $x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ alors : $2x-1\geq 0$

$\sqrt{x^2+1}\leq 2x-1$ Equivaut à : $\sqrt{x^2+1}^{\,2}\leq(2x-1)^2$ Equivaut à : $x^2+1\leq 4x^2-4x+1$

Equivaut à : $-3x^2+4x\leq 0$

Equivaut à : $x(-3x+4)\leq 0$

Étudions le signe du trinôme suivant : $x(-3x+4)$

x	$-\infty$	0		$4/3$	$+\infty$
$-3x+4$	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
$x(-3x+4)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x(-3x+4)\leq 0$ Equivaut à : $x\in]-\infty;0]\cup\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Donc : $S_2=\left(]-\infty;0]\cup\left[\frac{4}{3};+\infty\right[\right)\cap\left[\frac{1}{2};+\infty\right[=\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est : $S=S_1\cup S_2=\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Exercice11 : (***) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

(I) ; $\sqrt{x-1} \geq x-7$

Corrigé : Remarque : La relation $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$ n'est pas vraie si les deux nombres sont de signes contraires.

a) L'équation est définie si $x-1\geq 0$ Signifie que : $x\geq 1$

L'équation est donc définie sur : $D_I=[1,+\infty[$

b) Le tableau de signe de l'expression : $x-7$

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$x-7$		$-$	0	$+$	

Si : $x\in[1;7[$ alors : $x-7<0$ donc : $\sqrt{x-1}\geq x-7$ est vraie pour tout $x\in[1;7[$

Donc : $S_1=[1;7[$

Si : $x\in[7;+\infty[$ alors : $x-7\geq 0$

$\sqrt{x-1}\geq x-7$ Equivaut à : $\sqrt{x-1}^2\geq(x-7)^2$ Equivaut à : $x-1\geq x^2-14x+49$

Equivaut à : $x-1-(x^2-14x+49)\geq 0$

Equivaut à : $x-1-x^2+14x-49\geq 0$

Equivaut à : $-x^2+15x-50\geq 0$

Étudions le signe du trinôme suivant : $-x^2+15x-50$

Calculons le discriminant de $-x^2+15x-50$: $a=-1$; $b=15$; $c=-50$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=15^2-4\times(-1)\times(-50)=225-200=25>0$

Comme $\Delta>0$, le trinôme : $-x^2+15x-50$ possède deux racines distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-15-\sqrt{25}}{2\times(-1)}=\dfrac{-20}{-2}=10$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-15+\sqrt{25}}{2\times(-1)}=\dfrac{-10}{-2}=5$

x	$-\infty$		5		10		$+\infty$
$-x^2+15x-50$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$-x^2+15x-50\geq 0$ Equivaut à : $x\in[5;10]$

Donc : $S_2=[5;10]\cap[7;+\infty[=[7;10]$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est : $S=S_1\cup S_2=[1;10]$

Exercice12 : (***) 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre $m\in\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $m(mx-1)<x(1-m)$

Corrigé : $m(mx-1)<x(1-m)$

$m(mx-1)<x(1-m)$ Équivalent à : $m^2x-m<x-mx$

Équivalent à : $m^2x+mx-x<m$

Équivalent à : $(m^2+m-1)x<m$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) $m^2+m-1=0$

Le discriminant de : (E) $m^2+m-1=0$ est : $\Delta=5>0$ et ses solutions sont : $m_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $m_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Comme : $a=1>0$ on déduit le tableau de signe suivant :

m	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$m2+m-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1ére cas : $m \in \left]-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right[$ on a ; $m^2+m-1>0$:

$(m^2+m-1)x<m$ Équivalent à : $x<\frac{m}{m^2+m-1}$

Donc : $S=\left]-\infty;\frac{m}{m^2+m-1}\right[$

2ére cas : $m \in \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$ on a $m^2+m-1<0$:

$(m^2+m-1)x<m$ Équivalent à : $x>\frac{m}{m^2+m-1}$

Donc : $S=\left]\frac{m}{m^2+m-1};+\infty\right[$

3ére cas : $m=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ l'inéquation devient : $0x<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 'impossible

Par suite : $S=\varnothing$

4ére cas : $m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ l'inéquation devient : $0x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Par suite : $S=\mathbb{R}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien