Tronc commun Sciences BIOF

Correction Série N°6 : Les polynômes

Exercice1 : (**) Soit : $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

1) Montrer que $P(x)$ est divisible par $x-3$

2) Factoriser $P(x)$

Solution :1) On vérifie que : $P(3)=0$

Donc : 3 est racine du polynôme $P(x)$ par suite $P(x)$ est divisible par $x-3$

2) En Effectuant la division euclidienne de : $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$ par $x-3$.

On aura : $P(x)=(x-3)(2x^2+x-1)$

Exercice2 : (***) On considère les polynômes : $P(x)=-4x^3+8x^2+25x-14$ et $Q(x)=-4x^2+16x-7$

1) a) Démontrer, sans effectuer la division euclidienne, que $P(x)$ est divisible par $x+2$

b) Démontrer en utilisant la division euclidienne que : $P(x)=(x+2)Q(x)$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

b) En déduire une factorisation de $Q(x)$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

3)a) Calculer : $(1+\sqrt{3})^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2+(1-\sqrt{3})x-\sqrt{3}=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x^2+(1-\sqrt{3})x-\sqrt{3}}{-4x^2+16x-7}\leq 0$

Solution :1) $P(x)=-4x^3+8x^2+25x-14$ et $Q(x)=-4x^2+16x-7$

1) a) On a : $P(-2)=-4\times(-2)^3+8(-2)^2+25\times(-2)-14=32+32-50-14=64-64=0$

Donc : -2 est racine du polynôme $P(x)$

Donc : $P(x)$ est divisible par $x+2$

b) Démontrons en utilisant la division euclidienne que : $P(x)=(x+2)Q(x)$

En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x+2$ on trouve :

$$\begin{array}{cccc|l}
-4x^3 & +8x^2 & +25x & -14 & x+2 \\ \cline{5-5}
-(-4x^3 & -8x^2) & & & -4x^2+16x-7 \\ \cline{1-2}
+0x^3 & +16x^2 & +25x & & \\
 & -(+16x^2 & +32x) & & \\ \cline{2-3}
 & +0x^2 & -7x & -14 & \\
 & & -(-7x & -14) & \\ \cline{3-4}
 & & +0 & &
\end{array}$$

On a donc : $P(x)=(x+2)Q(x)$ avec $Q(x)=-4x^2+16x-7$

2) a) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $Q(x)=0$:

$-4x^2+16x-7=0$

Le discriminant de : $-4x^2+16x-7=0$ est : $\Delta=(16)^2-4\times(-7)\times(-4)=144=12^2>0$ et ses solutions sont :

$x_1=\dfrac{-16+12}{2\times(-4)}=\dfrac{-4}{-8}=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{-16-12}{2\times(-4)}=\dfrac{-28}{-8}=\dfrac{7}{2}$

Par conséquent : $S=\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right\}$

b) Déduction d'une factorisation de $Q(x)$:

$Q(x)=-4x^2+16x-7$ Admet deux racines : $x_1=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{7}{2}$

Donc : $Q(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{7}{2}\right)=-2\times2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{7}{2}\right)=-(2x-1)(2x-7)$

c) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $P(x)=0$

$P(x)=0$ Signifie que : $(x+2)Q(x)=0$ Signifie que : $x+2=0$ ou $Q(x)=0$

Signifie que : $x_0=-2$ ou $x_1=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{7}{2}$

Par conséquent : $S=\left\{-2;\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right\}$

3)a) Calculons : $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

$\left(1+\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times\sqrt{3}\times1+1^2=3+1+2\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}$

b) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$

Le discriminant de : $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$ est :

$\Delta=b^2-4ac=\left(1-\sqrt{3}\right)^2-4\times\left(-\sqrt{3}\right)\times1=\left(1-\sqrt{3}\right)^2+4\sqrt{3}$

$\Delta=1^2-2\times1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2+4\sqrt{3}=1^2+2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

Donc : il y'a deux solutions :

$x_1=\dfrac{-\left(1-\sqrt{3}\right)+\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{2\times1}=\dfrac{\sqrt{3}-1+\left|1+\sqrt{3}\right|}{2\times1}$ et $x_2=\dfrac{\sqrt{3}-1-\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{2\times1}=\dfrac{\sqrt{3}-1-\left|1+\sqrt{3}\right|}{2\times1}$

Or: $1+\sqrt{3}\succ0$ Donc: $\left|1+\sqrt{3}\right|=1+\sqrt{3}$

Donc: $x_1=\dfrac{\sqrt{3}-1+1+\sqrt{3}}{2\times1}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ et $x_2=\dfrac{\sqrt{3}-1-1-\sqrt{3}}{2\times1}=\dfrac{-2}{2}=-1$

Par suite : $S=\left\{-1,\sqrt{3}\right\}$

4) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\dfrac{x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}}{-4x^2+16x-7}\leq0$

$Q(x)=-4x^2+16x-7$ admet deux racines : $x_1=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{7}{2}$

Et $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}$ admet deux racines : $x_1=\sqrt{3}$ et $x_2=-1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$x^2+(1-\sqrt{3})x-\sqrt{3}$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-4x^2+16x-7$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$\frac{(x^2+(1-\sqrt{3})x-\sqrt{3})}{-4x^2+16x-7}$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

Par suite : $S = \left]-\infty;-1\right] \cup \left]\frac{1}{2},\sqrt{3}\right] \cup \left]\frac{7}{2},+\infty\right[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien